زيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه في الشبكات عن طريق التحويلات الهندسية

د.م. تيسير خليل*

ملخص البحث

في هذا البحث سندرس طريقة جديدة لزيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه في الشبكات التي تغلب عليها هذه العناصر عن طريق إجراء التحويلات الهندسية.

المعطيات في هذه الدراسة هي شبكة ذات طابع سداسي تتألف من عناصر سداسية الوجوه وعناصر موشورية وعناصر هرمية وعناصر هرمية رباعية الوجوه.

سوف نقوم بتعديل الشبكة من أجل زيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه مع الحفاظ على معايير وشروط التطابق الأربعة مما يسمح بربط هرمين رباعيين إلى سطح رباعي أضلاع من سداسي وجوه أو موشور.

سوف نعرف ثلاثة أنواع من التحويلات الهندسية هي: التحويل بضغط الحرف والتحويل بإضافة ذروة وتحويل القص.

إذا كانت الشبكة المذكورة تلبي معايير وشروط التطابق الأربعة فإنه يمكن استخدامها من أجل التحليل عن طريق العناصر المحدودة. إن زيادة عدد العناصر السداسية الوجوه والموشورية في الشبكات ذات الطبع السداسي يؤدي إلى جعل نتائج التحليل بالعناصر المحدودة أكثر دقة ويمكن الحصول عليها بزمن أقل. تؤدي هذه الطريقة إلى تحسين الشبكات ذات الطابع السداسي. وبالتالي فإن عدد سداسيات الوجوه يزداد بمقدار %(10~20)عند تطبيق التحويلات الهندسية على الشبكة وهذا ما يؤدي للحصول على شبكة ذات طابع سداسي تكون نسبة حجوم العناصر السداسية فيها %(70~90).

---

* مدرس في كلية الهندسة المدنية.

Scanned by CamScanner

زيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه في الشبكات عن طريق التحويلات الهندسية

المقدمة:

في هذا البحث سندرس طريقة جديدة لزيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه في الشبكات التي تغلب عليها هذه العناصر عن طريق إجراء التحويلات الهندسية.

إن المعطيات في هذه الدراسة هي شبكة ذات طابع سداسي تتألف من عناصر سداسية الوجوه وعناصر موشورية وعناصر هرمية وعناصر هرمية رباعية الوجوه. سوف نقوم بتعديل الشبكة من أجل زيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه مع الحفاظ على معايير وشروط التطابق مما يسمح بربط هرمين رباعيين إلى سطح رباعي أضلاع من سداسي وجوه أو موشور.

إذا كانت الشبكة المذكورة تلبي معايير وشروط التطابق فإنه يمكن استخدامها من أجل التحليل عن طريق العناصر المحدودة مع الأخذ بعين الاعتبار تقليص الخطأ قدر الإمكان عند الوجوه غير المتطابقة [1,2,3]. ويتم ذلك بإدخال العناصر الهرمية عند الوجوه غير المتطابقة [4]، أو عن طريق تحويل الشبكة إلى شبكة سداسية كلياً وفق الطريقة التقليدية [5,6].

إن زيادة عدد العناصر السداسية الوجوه والموشورية في الشبكات ذات الطبع السداسي يؤدي إلى جعل نتائج التحليل بالعناصر المحدودة أكثر دقة ويمكن الحصول عليها بزمن أقل. الطريقة التي هي موضوع البحث أدت إلى زيادة القيمة النوعية للشبكات ذات الطابع السداسي.

وقد بينت التجارب أن عدد سداسيات الوجوه يزداد بمقدار %(20~10) عند تطبيق التحويلات الهندسية على الشبكة وهذا ما يؤدي للحصول على شبكة ذات طابع سداسي تكون نسبة حجوم العناصر السداسية فيها %(90~70).

Scanned by CamScanner

قام عدد من الباحثين بتقديم طرائق لإيجاد الشبكات السداسية كالعالم مـــايرز [8]. أعطى العالمان توشنسكي وكلارك [9] أسلوباً لتشكيل الشـــبكات السداســـية بطريقـــة اللصق، مع العلم بأن الفضل يعود إلى مايرز وبلاكر [10] في إيجاد طريقة اللصـــق. ملخص هذه الطريقة أنه يتم تشكيل سداسيات الوجوه انطلاقاً من المحيط باتجاه الـــداخل بلصق العناصر بجانب بعضها وإذا لم نتمكن من ملء كامل الحجم بالعناصر سداســـية الوجوه نقوم بملء الحجم المتبقي بالأهرام رباعية الوجوه.

العالمان أوين وسايجال أعطيا مخططاً منهجياً (ألغوريتم) لتحويل الشبكات الهرمية رباعية الوجوه إلى شبكات سداسية عن طريق إيجاد عناصر سداسية الواحد تلو الآخـــر في المحيط ومن ثم الانتقال إلى الداخل، سميت هذه الطريقة بالطريقة H [11]، ومـــن ميزات هذه الطريقة أنها تخلط بين العناصر كافة ضمن الشبكة.

في هذا البحث سوف نشرح الطريقة الجديدة لزيادة عدد العناصر السداسية الوجوه في الشبكات ذات الطبع السداسي عن طريق التحويلات الهندسية. بشـــكل عـــام فـــإن الشبكات السداسية تعطي نتائج أكثر دقة عند استخدام طريقة العناصر المحدودة وبزمن حسابي أقل مقارنة باستخدام الشبكات الهرمية الرباعية والتي لها عدد درجات الحريـــة نفسها. الشبكات التي يغلب عليها الطابع السداسي يمكن تشكيلها آلياً وبسهولة أكبر مـــن الشبكات السداسية كلياً، إلا أنه ومع تساوي عدد درجات الحرية فإن دقة وزمن الحساب بالتحليل بالعناصر المحدودة يعتمد على النسبة بين عدد العناصر السداسية بالشبكة إلـــى العدد الكلي من العناصر وعلى النسبة بين حجم العناصر السداسية بالشبكة إلـــى العـــدد الكلي للعناصر. وبالتالي فإن زيادة عدد العناصر سداسية الوجوه من شأنه أن يزيد من دقة الحل وأن يقلل من زمن الحساب.

وهكذا فإنه من الأفضل أن يتم تشكيل شبكة يغلب عليها الطابع السداســـي بـــأكبر عدد ممكن وأكبر حجم ممكن من العناصر سداسية الوجوه، وقد يكون مـــن المفيـــد أن نقوم بتعديل لاحق لشبكة موجودة لزيادة عدد وحجم العناصر السداسية وهذا ما يتم عن طريق التحويلات الهندسية.

Scanned by CamScanner

ليكن لدينا شبكة يغلب عليها الطبع السداسي تتألف من سداسيات وجوه وعناصر موشورية وعناصر هرمية وعناصر هرمية رباعية. سنقوم بزيادة عدد وحجم العناصر السداسية مع الحفاظ على شروط ومعايير التطابق الأولية، مما يسمح بربط هرمين رباعيين إلى سطح رباعي الأضلاع واقع على سداسي وجوه أو موشور.

سنقوم أولاً بإعادة تقسيم العناصر الموشورية والهرمية الموجودة في الشبكة المعطاة إلى أجسام هرمية رباعية الوجوه. بعدها سنقوم بتطبيق مجموعة من التحويلات الهندسية لزيادة عدد سداسيات الوجوه ومن ثم سندمج بعض العناصر الهرمية رباعية الوجوه لتحويلها إلى أجسام موشورية [7].

شروط ومعايير التطابق الأولية:

إن التحويلات الهندسية التي سنقوم بشرحها تطبق على الشبكات السداسية ذات الطابع السداسي التي تحقق شروط التطابق الأولية.

هذه الشروط تسمح بربط هرمين رباعيي الوجوه مع سداسي وجوه أو موشور عن طريق وجه أو سطح رباعي أضلاع. الغاية من شروط التطابق الأولية جعل الشبكة قابلة للتحليل بالعناصر المحدودة والتخلص من صعوبة تشكيل الشبكة ذات الطابع السداسي.

إن شروط ومعايير التطابق التقليدية تقتضي أن التداخل بين عنصرين يكون محدداً على ألا يكون التداخل بين أكثر من عنصرين، لهذا فإنه لا يمكن أن يشترك هرم رباعي وجوه مع سداسي وجوه بسطح مباشرة لأن سداسي الوجوه يملك فقط وجوهاً رباعية الأضلاع والهرم رباعي الوجوه يملك وجوهاً مثلثية الأضلاع. وهذا الشرط يجعل من تشكيل الشبكة ذات الطابع السداسي أمراً صعباً جداً وللتخلص من صعوبة تشكيل مثل هذه الشبكات فإنه يتم إدخال الشروط الأولية للتطابق، مما يسمح باتصال وجهين مثلثين من هرمين رباعيي الوجوه إلى وجه رباعي أضلاع من سداسي وجوه بمشاركة أربع ذرى، مع العلم بأن هذا الاتصال غير متطابق أو بتعبير أكثر دقة إنه رباعي أضلاع غير متطابق. سنعرف شروط ومعايير التطابق الأولية.

Scanned by CamScanner

الشرط الأول:

في الرباعي الأضلاع غير المتطابق يجب أن يكون هناك هرمان رباعيا الأضلاع لكل منهما مثلث واحد يشتركان بثلاث أو أربع ذرى من رباعي الأضلاع غير المتطابق.

رباعي الأضلاع الذي نحصل عليه من دمج المثلثين السابقين يجب أن يتساوى مع رباعي الأضلاع غير المتطابق.

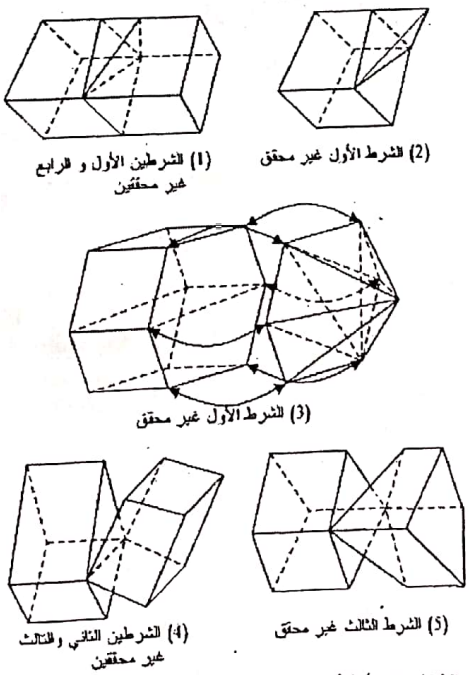
الشرط الثاني:

إن قطر رباعي الأضلاع غير المتطابق يجب ألا يكون ضلعاً لرباعي أضلاع آخر.

الشرط الثالث:

إذا اشترك رباعيا أضلاع بذروتين فقط يجب أن يشتركا بضلع (أي إن الاشتراك فقط بقطر غير ممكن).

الشرط الرابع: يجب ألا يشترك رباعيا أضلاع بثلاث ذرى فقط.



الشكل (1) أمثلة حول عدم تحقيق شروط التطابق الأولية

Scanned by CamScanner

الحالة المبينة في الشكل (1-1) لا تحقق الشرط الأول والرابع، لأن سداسي الوجوه اليساري يرتبط بسداسي الوجوه اليميني و يرتبط كذلك بالهرم الرباعي الوجوه عن طريق سطح رباعي الأضلاع، ورباعي الأضلاع الواقع على الوجه اليميني لسداسي الوجوه اليساري يشترك مع رباعي الأضلاع الواقع على الوجه اليساري لسداسي الوجوه اليميني بثلاث ذرى فقط.

الشكل (1-2) لا يحقق الشرط الأول لأن هرم رباعي أضلاع واحد يرتبط إلى رباعي الأضلاع اليميني الواقع على سداسي الوجوه، ويقع نصف رباعي الأضلاع اليميني خارج الشبكة.

الشكل (1-3) لا يحقق الشرط الأول لأن رباعي الأضلاع اليميني الواقع على سداسي الوجوه العلوي يرتبط بثلاثة أهرامات رباعية الوجوه ورباعي الأضلاع اليميني الواقع على سداسي الوجوه السفلي يرتبط بأربعة أهرامات رباعية الوجوه.

الشكل (1-4) لا يحقق الشرط الثاني والثالث لأن أحد أحرف رباعي الأضلاع يقع على قطر رباعي أضلاع آخر.

الشكل (1-5) لا يحقق الشرط الثالث لأن رباعي الأضلاع اليميني الواقع على سداسي الوجوه اليساري ورباعي الأضلاع اليساري الواقع على سداسي الوجوه اليميني يشتركان بذروتين ولا يشتركان بحرف.

إذا حققت الشبكة ذات الطابع السداسي الشروط الأربع فإنه يمكن استخدامها للتحليل بالعناصر المحدودة بوساطة أحد الطرق الثلاث التالية:

الطريقة الأولى:

إدخال عناصر هرمية عند كل رباعي أضلاع غير متطابق من أجل تحقيق التطابق الكامل وفق طريقة أوين [4].

الطريقة الثانية:

تطبيق طريقة لتقليص الخطأ مثل نظرية التربيعات الصغرى [1,2] أو طريقة العالم دهورمان [3].

الطريقة الثالثة:

تحويل الشبكة إلى شبكة سداسية كلياً.

Scanned by CamScanner

وهكذا فإن تحقيق شروط ومعايير التطابق كفيل بجعل الشبكات التي يغلب عليها الطابع السداسي أكثر قابلية للتحليل بالعناصر المحدودة. هناك ثلاثة أنواع من التحويلات الهندسية، سوف نشرح كلاً منها بشكل مفصل فيما يلي.

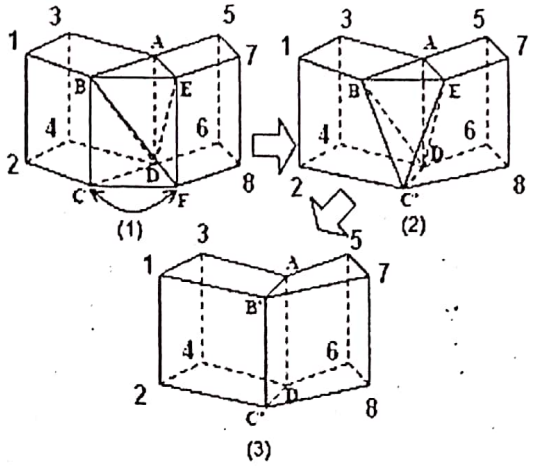
التحويل الأول: ضغط الحرف

إن التحويل بطريقة ضغط الحرف تستخدم فقط من أجل ضغط أحد أحرف الهرم رباعي الوجوه وجميع الأهرامات رباعية الوجوه المشتركة في هذا الحرف سوف تزال، وذروتا هذا الحرف ستصبحان ذروة واحدة.

إذا كانت ذروتا هذا الحرف غير واقعتين على أي سداسي وجوه يمكن إجراء هذا التحويل بسهولة عن طريق دمج هاتين الذروتين في ذروة واحدة، وحذف جميع الأهرامات الرباعية الوجوه المتأثرة بعملية الدمج. ولكن إذا كانت أحد ذروتي الحرف واقعة على سداسي وجوه فإننا قد لا نحقق شروط ومعايير التطابق الأولية عند القيام بهذا التحويل لذا يجب التحقق من هذا الأمر.

إذا لم تتحقق شروط ومعايير التطابق الأولية الناتجة عن دمج الحرف فإنه يمكن حل المشكلة عن طريق القيام بدمج متتابع للأحرف ومثال على ذلك يوضحه الشكل (2). في الشكل (1-2) نبين قطاعاً من شبكة يتألف من سداسي وجوه مع ثلاثة أهرامات رباعية وجوه بينها. عندما يتم ضغط الحرف **CF** فإن شروط ومعايير التطابق الأولية لا تتحقق لأن رباعي الأضلاع **EDC'A , ABC'D** يشتركان فقط بثلاث ذرى كما هو موضح بالشكل (2-2) والحل يكون بضغط الحرف **BE** كما هو موضح بالشكل (3-2). إن ضغط حرف آخر قد يؤدي إلى الإخلال بشروط ومعايير التطابق الأولية وإذا حصل ذلك فإنه يجب ضغط حرف آخر. وهكذا نجد بأن ضغط أحد الأحرف قد يضطرنا إلى القيام بسلسلة عمليات ضغط أحرف حتى يتم تحقيق شروط ومعايير التطابق الأولية. وعلى الرغم من ذلك، فإن خرق شروط ومعايير التطابق الأولية قد لا يمكن حله دائماً بالقيام بمجموعة من التحويلات الهندسية مما يضطرنا إلى إلغاء هذا لتحويل.

Scanned by CamScanner



الشكل (2) التحويل بضغط الحرف: إيجاد حل مناسب في حال كون شروط التطابق الأولية غير محققة عن طريق سلسلة من هذه التحويلات

التحويل الثاني: إضافة ذروة :

إن هذا التحويل يضيف ذروة إلى أحد الأحرف ويعيد تقسيم العناصر وفق هذا الحرف. إذا كان الحرف المقصود (الحرف الذي سيتم إضافة الذروة له) واقعاً على هرم رباعي وجوه فإن كل هرم رباعي وجوه يشترك بهذا الحرف سوف يتم تقسيمه إلى هرمين رباعيي وجوه بوساطة مثلث مشكل من الذروة المضافة إلى الحرف والذروتين الواقعتين على الهرم رباعي الوجوه الأصلي واللتين لا ترتبطان بهذا الحرف.

ليس من السهولة إضافة ذروة إلى حرف من سداسي وجوه لأن هناك أربعة احتمالات لأنماط التقسيم الممكنة، ويجب اختيار النمط المناسب الذي يتوافق مع التعديل حول سداسي الوجوه وإلا فإنه لا يمكننا تطبيق هذا التحويل إذا لم تتلاءم أي من الأنماط الأربع مع التعديل.

يبين الشكل (3) أنه عند إضافة الذروة **X** إلى الحرف **FG** من سداسي الوجوه **ABCDEFGH** فإنه يمكن تقسيم سداسي الوجوه وفق أربعة أنماط محتملة:

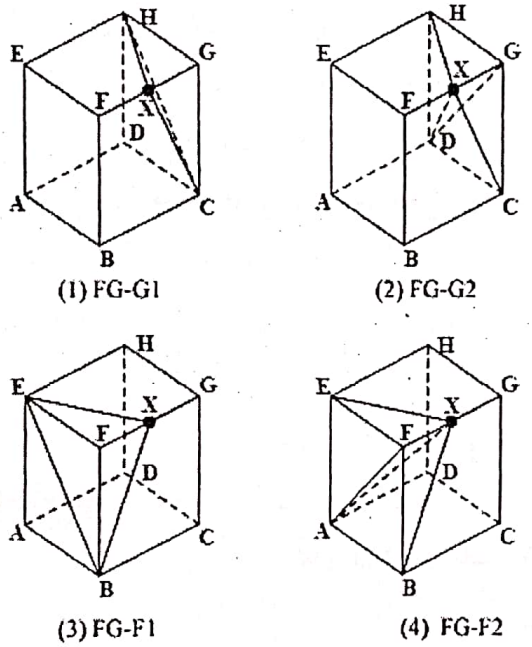
1- سداسي وجوه **ABCDEFXH** وهرم رباعي وجوه واحد **CHGX** كما هو موضح بالشكل (1-3).

Scanned by CamScanner

2- سداسي وجوه **ABCDEFXH** وهرمان رباعيان **DHGX** ، **CDGX** كما هو موضح بالشكل (2-3).

3- سداسي وجوه **ABCDEXGH** وهرم رباعي وجوه كما هو موضح بالشكل (3-3).

4- سداسي وجوه **ABCDEXGH** وهرمان رباعيا وجوه **AEXF** ، **BAXF** كما هو موضح بالشكل (4-3).



الشكل (3) الأنماط الأربعة المحتملة للتقسيم عند إضافة عقدة على حرف من سداسي وجوه

وللتمييز بين هذه الأنماط فإننا سوف نرمز لنمط التقسيم بـ **PQ-R*n*** والذي يعني أنه تم إضافة ذروة على الضلع **PQ** وأصبحت **R** ذروة في هرم رباعي وجوه جديد (**R** إما تساوي **P** أو تساوي **Q**)، و *n* هي عدد الأهرامات رباعية الوجوه الجديدة التي تشكلت من إضافة الذروة.

Scanned by CamScanner

إن نمط التقسيم -1- سنرمز له بالرمز **FG-G*1***

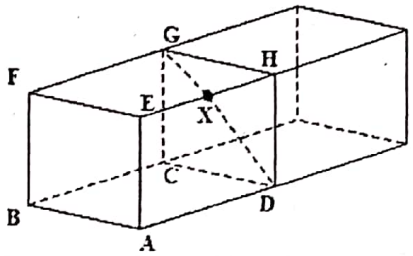
ونمط التقسيم -2- سنرمز له بالرمز **FG-G*2***

ونمط التقسيم -3- سنرمز له بالرمز **FG-F*1***

ونمط التقسيم -4- سنرمز له بالرمز **FG-F*2***

من أجل تطبيق النمط **PQ-R*n*** فإن وجه سداسي الوجوه الذي يحوي الذروة **R** ولا يحوي الحرف **PQ** يجب أن يكون إما رباعي أضلاع غير متطابق أو رباعي أضلاع واقع على محيط الشبكة.

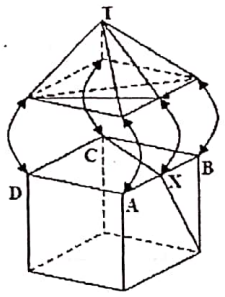
مثلاً إذا تم تطبيق النمط **AH-H*1*** أو **AH-H*2*** على الشبكة المبينة بالشكل (4) فإن رباعيي الأضلاع **DCGX** و **DCGH** سوف يشتركان فقط بثلاث ذرى بعد إضافة ذروة جديدة **X** وسوف يتم عدم تحقيق الشرط الرابع من شروط ومعايير التطابق الأولية.



الشكل (4) التحويل بإضافة ذروة: تطبيق التحويل EH-X1 أو التحويل EH-X2 على هذه الشبكة يؤدي إلى عدم تحقيق شروط التطابق الأولية

وإضافة إلى ذلك فإن تطبيق النمط **PQ-R*n*** في حالة كون السطح ذي أربعة الأضلاع من سداسي الوجوه المشترك بالحرف **PQ** هو رباعي أضلاع غير متطابق، فإن أحد أحرف الهرمين رباعيي الوجوه المرتبطين بسطح رباعي الأضلاع الواقع على قطر رباعي الأضلاع يجب ألا يشترك بالذروة **R**. مثلاً عندما يتم ربط هرميّ رباعيي وجوه **DCBT , ADBT** إلى السطح **ABCD** كما هو مبين بالشكل (5) فإن تطبيق النمط **AB-B*n*** سوف يؤدي إلى عدم تحقيق الشرط الأول من شروط التطابق الأولية لأن رباعي الأضلاع غير المتطابق **AXCD** سوف لن يرتبط إلى وجهي هرمين رباعيي أضلاع.

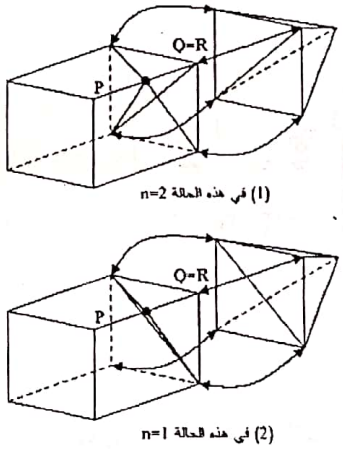
Scanned by CamScanner



الوجه AXCD لا يحقق
الشرط الأول من شروط
التطابق الأولية

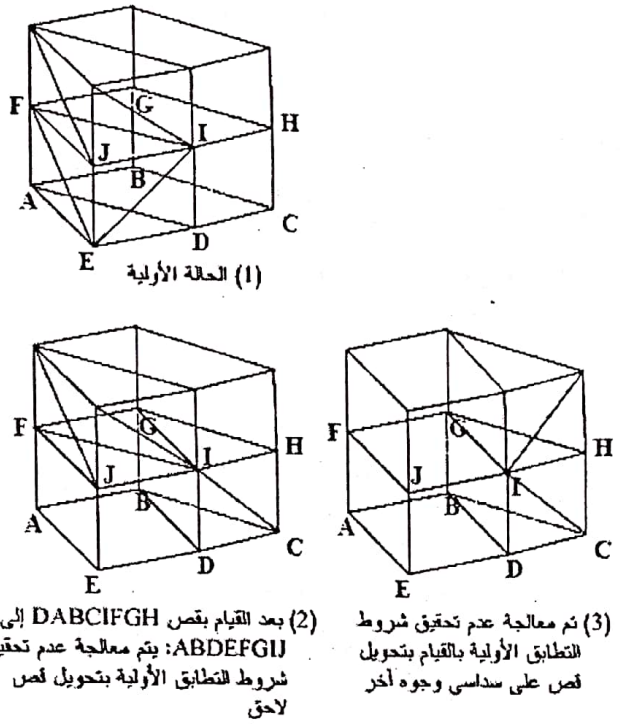
الشكل (5) التحويل بإضافة ذروة: الهرمين رباعيي الوجوه المرتبطين بالوجه ABCD يجب ألا يحويا الحرف AB

إذا كانت جميع سداسيات الوجوه المشتركة بالحرف **PQ** تحقق الشروط السابقة للنمط **PQ-R*n*** (حيث n تختلف على كامل سداسي الوجوه) فإنه يمكن إضافة ذروة إلى الحرف **PQ** مع الملاحظة بأنه يجب اختبار n بشكلٍ مناسب. إذا كان السطح رباعي الأضلاع المشترك بالذروة **R** وغير المشترك بالحرف **PQ** هو رباعي أضلاع غير متطابق فإن أحد أحرف الهرمين رباعيي الوجوه المرتبطين بالسطح رباعي الأضلاع يجب أن يقعا على قطر السطح رباعي الأضلاع. إذا كان حرف الهرم رباعي الوجوه الواقع على قطر السطح رباعي الأضلاع يشترك بالذروة R فإن $n=2$ كما هو موضح بالشكل (1-6)، و إلا فإن $n=1$ كما هو مبين بالشكل (2-6).



الشكل (6) في التحويل PQ-Rn فإن n تكون محددة بواسطة الأهرام رباعية الوجوه المرتبطة بالسطح رباعي الأضلاع المشترك بالذروة R وغير المشترك بالحرف PQ

Scanned by CamScanner



(1) الحالة الأولية

(2) بعد القيام بقص DABCIFGH إلى ABDEFGIJ: يتم معالجة عدم تحقيق شروط التطابق الأولية بتحويل قص لاحق

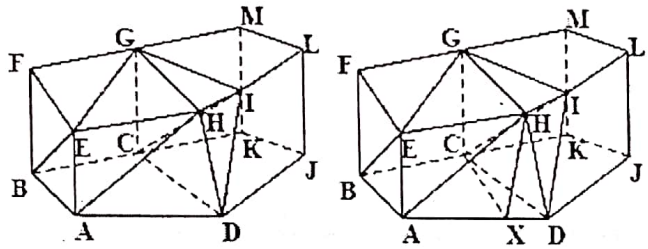
(3) ثم معالجة عدم تحقيق شروط التطابق الأولية بالقيام بتحويل قص على سداسي وجوه آخر

الشكل (8) قد يؤدي تحويل قص واحد إلى سلسلة متعاقبة من تحويلات القص (لم يتم رسم جميع الأحرف الداخلية)

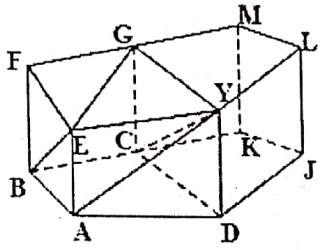
زيادة سداسيات الوجوه عن طريق التحويلات الهندسية

سنشرح ثلاثة أنواع من التحويلات التي تزيد من عدد وحجم سداسيات الوجوه عن طريق التحويلات الهندسية السابقة. النمط المبين في الشكل (1-9) يمكن حله إما بضغط الحرف **HI** أو بإضافة ذروة إلى الحرف **AD**. الشكل (1-9) يبين قطاعاً من شبكة يغلب عليها الطابع السداسي تتألف من سداسي وجوه على اليمين و أهرامات رباعية وجوه تملأ باقي القطاع.

Scanned by CamScanner



(1) قبل القيام بالتحويل (2) بعد إضافة عقدة على الحرف AD



(3) بعد ضغط الحرف HI

الشكل (9) حالة يمكن حلها إما بإضافة عقدة على الحرف AD أو بضغط الحرف HI (لم يتم رسم جميع الأحرف الداخلية)

إذا تم تحويل الهرم رباعي الوجوه الواقع على يسار رباعي الأضلاع **CDHG** إلى سداسي وجوه **ABCDEFGH** فإن رباعيي الأضلاع **CDHG**، **CDIG** يشتركان فقط بثلاث ذرى مما لا يحقق شروط التطابق الأولية.

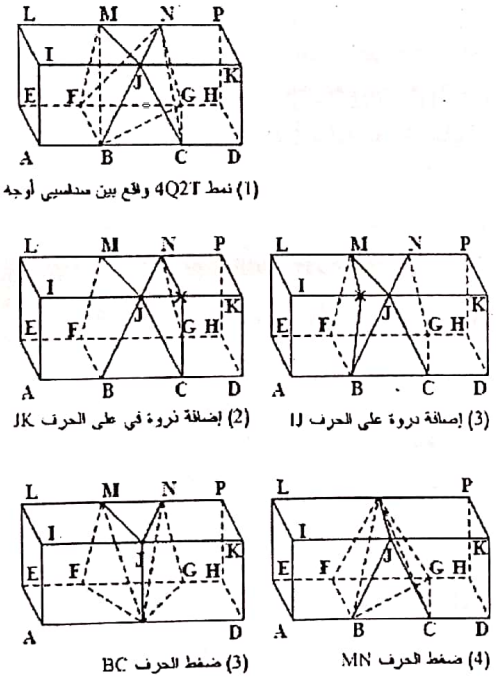
إذا تم إضافة الذروة **X** إلى الحرف **AD** كما هو مبين بالشكل (2-9) فإنه يمكن تحويل الأهرام رباعية الوجوه الواقعة على يسار رباعي الأضلاع **XCGH** إلى سداسي وجوه **ABCXEFGH** والأهرام رباعية الوجوه الواقعة بين سداسيي الوجوه **DCKJIGML**، **ABCXEFGH** يمكن تحويلها إلى موشور.

حل آخر لهذه الحالة يتم بضغط الحرف **HI** إلى الذروة **Y** كما هو موضح بالشكل (3-9)، وبالتالي فإن الأهرام رباعية الوجوه الواقعة على يسار **DCGY** يمكن تحويلها إلى سداسي وجوه **ABCDEFGY**.

Scanned by CamScanner

الشكل (1-10) يبين حالة أهرام رباعية الوجوه محصورة بين سداسيي وجوه من اليمين واليسار.

يلزمنا ذروة إضافية لتحويل الأهرام رباعية الوجوه إلى سداسي وجوه أو يجب علينا إضافة ذروة لتحويل الأهرام السابقة إلى موشور. وبما أن الحجم الكائن بين سداسي الوجوه محصور بأربع رباعيات أضلاع ومثلثين فإننا سندعوه بالنمط *4Q2T*. يتم حل هذا النمط المبين بالشكل (1-10) بإضافة ذروة إما إلى الحرف **JK** الشكل (2-10)، أو إلى الحرف **IJ** الشكل (3-10). إذا تم إضافة ذروة إلى **JK** أو **IJ** فإن الأهرام رباعية الوجوه المحصورة بين سداسي الوجوه سوف يتم تحويلها إلى سداسي وجوه آخر. يمكن الحصول على حل آخر بضغط الحرف **BC** كما هو موضح بالشكل (4-10) أو ضغط الحرف **MN** كما هو موضح بالشكل (5-10). إذا تم ضغط الحرف **BC** أو الحرف **MN** فإن الأهرام رباعية الوجوه المحصورة بين سداسي الوجوه سوف يتم تحويلها إلى موشور.

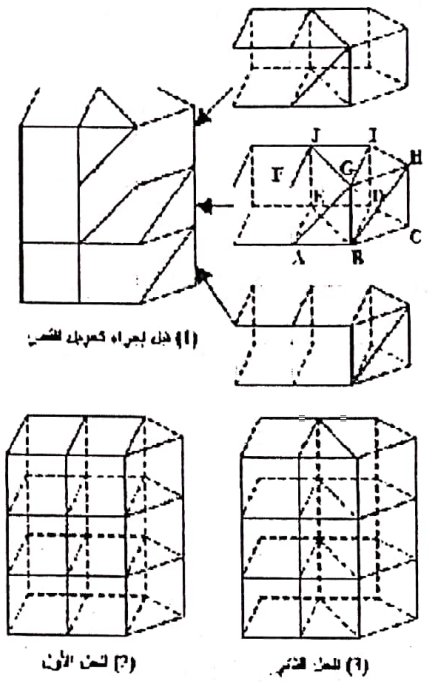


الشكل (10) الحلول الممكنة للنمط 4Q2T
(لم يتم رسم جميع الأحرف الداخلية)

Scanned by CamScanner

الشكل (11) يبين نمطاً يمكن حله بوساطة تحويل القص. تتألف الشبكة من ثلاثة صفوف من العناصر الصف العلوي يحتوي على سداسي وجوه من اليمين واليسار والصف الوسطي يحتوي على سداسي وجوه من اليسار بينما يحتوي الصف السفلي على سداسيّ وجوه من اليسار، وباقي القطاع يتم ملؤه بالأهرامات رباعية الوجوه. إذا تم تحويل الأهرامات الواقعة على يسار **GDIB** في الصف الوسطي إلى سداسي وجوه **AEDBFJIG** فإن رباعي الأضلاع **FJIG** سوف يشترك فقط بثلاث ذرى مع الوجه السفلي من سداسي الوجوه اليميني الواقع في الصف العلوي. وإذا تم تحويل الأهرامات رباعية الوجوه الواقعة على يمين **GJEB** في الصف الأوسط إلى سداسي وجوه **BEDCGJIH** فإن رباعي الأضلاع **BEDC** سوف يشترك بثلاث ذرى فقط مع رباعي الأضلاع العلوي الواقع على سداسي الوجوه اليميني في الصف السفلي. وكلا الحالتين لا تحققان شروط التطابق الأولية. إذا تم قص سداسي الوجوه اليميني في الصف العلوي بحيث أن النمط في الصف العلوي يتشابه مع النمط في السفلي فإن الأهرام رباعية الوجوه الواقعة على يسار **GIDB** في الصف الوسطي يمكن تحويلها إلى سداسي وجوه **AEDBFJIG**، وبقية الأهرامات سوف يتم تحويلها إلى موشور كما هو موضح بالشكل (2-11). إذا تم قص سداسي الوجوه اليميني في الصف السفلي فإن الأهرام رباعية الوجوه الواقعة على يمين **GJEB** في الصف السفلي يمكن تحويلها إلى سداسي وجوه **BADCGJIH** وبقية الأهرام سوف يتم تحويلها إلى موشور كما هو موضح بالشكل (3-11).

Scanned by CamScanner



الشكل (11) حالة يمكن حلها بواسطة تحويل القص
(لم يتم رسم جميع الأحرف)

النتائج والاستنتاجات

يبين الشكل (12) نتائج تجريبية لهذه الطريقة طبقت على جسم هندسي، حيث أنه تم تشكيل شبكة أولية تغلب عليها العناصر السداسية، وقد أوضحنا هذه الشبكة قبل وبعد قيامنا بالتحويلات الهندسية، وأوردنا الإحصاءات الخاصة بعدد وحجوم العناصر قبل وبعد تطبيق هذه التحويلات.

نلاحظ من خلال النتائج التجريبية أن عدد وحجم العناصر سداسية الأوجه قد ازداد وبالمقابل انخفض عدد وحجم العناصر الهرمية رباعية الوجوه، حيث ازداد عدد العناصر السداسية الأوجه من 30% قبل التحويلات إلى 50% بعد التحويلات من إجمالي عدد العناصر في الشبكة، وازدادت نسبة الحجم الذي تشغله هذه العناصر من 67% قبل القيام بالتحويلات إلى 82% بعد التحويلات وذلك من إجمالي حجم الجسم الأصلي. هذه النتائج تبين أن هذه الطريقة التي شرحناها في هذا البحث والتي تعتمد على التحويلات الهندسية كانت فعالة في زيادة عدد وحجم العناصر سداسية الوجوه في الشبكات الهندسية التي تغلب هذه العناصر عليها.

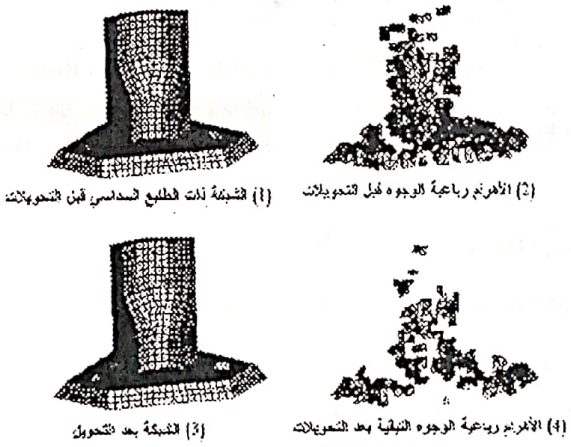
Scanned by CamScanner

قبل التحويلات:

عدد الذرى	2375
عدد العناصر	3308
عدد العناصر سداسية الوجوه	1008(30%)
عدد العناصر الموشورية	402(12%)
عدد العناصر الهرمية رباعية الأوجه	1089(57%)
نسبة حجوم العناصر سداسية الوجوه	67%
نسبة حجوم العناصر الموشورية	13%
نسبة حجوم العناصر الهرمية رباعية الأوجه	20%

بعد التحويلات:

عدد الذرى	2336
عدد العناصر	2367
عدد العناصر سداسية الوجوه	1193(50%)
عدد العناصر الموشورية	302(12%)
عدد العناصر الهرمية رباعية الأوجه	872(36%)
نسبة حجوم العناصر سداسية الوجوه	82%
نسبة حجوم العناصر الموشورية	9%
نسبة حجوم العناصر الهرمية رباعية الأوجه	9%



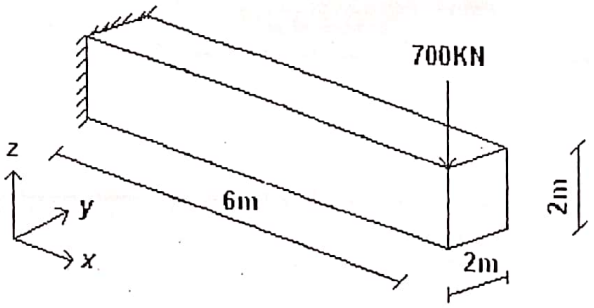
(1) الشبكة ذات المطابع السداسي قبل التحويلات
(2) الأهرام رباعية الوجوه قبل التحويلات
(3) الشبكة بعد التحويل
(4) الأهرام رباعية الوجوه المتبقية بعد التحويلات

الشكل (12) شبكة ذات مطابع سداسي لمجسم هندسي

Scanned by CamScanner

مثال تطبيقي

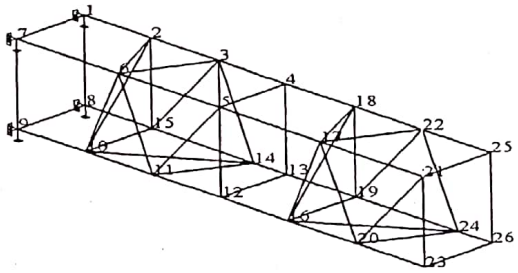
لتوضيح آلية تطبيق هذه الطريقة وفعاليتها عند تحليل المنشآت الهندسية باستخدام تقنية العناصر المحدودة، سندرس المثال البسيط التالي، ليكن لدينا الظفر المبين في الشكل (13) طوله 6m مصنوع من مادة الفولاذ معامل مرونته 2×10^6 KN/m^2 المقطع العرضي للظفر مربع طول ضلعه 2m تؤثر عند نهايته الحرة قوة مركزة شاقولية تتجه نحو الأسفل مقدارها 700KN كما هو موضح في الشكل (13). سوف نقوم بتحليل هذا الجائز الظفري باستخدام برنامجي *ROBOT* و *MATLAB* للتحليل الإنشائي وسنقارن الحلول الناتجة مع الحل الدقيق المحصول عليه من نظرية المرونة واللدونة أو من تقسيم الظفر إلى عدد كبير جداً من العناصر المحدودة والتي هي تقريباً $U_z = -0.11$cm . في جميع الحالات سوف ننمذج الجائز الظفري باستخدام عناصر محدودة تنطبق عقدها على ذرى هذه العناصر. سوف نقارن بين الحالات التالية عن طريق مقارنة قيم السهوم الشاقولية الناتجة في العقدة التي تؤثر فيها القوة الشاقولية المفروضة.



الشكل (13) الجائز الظفري

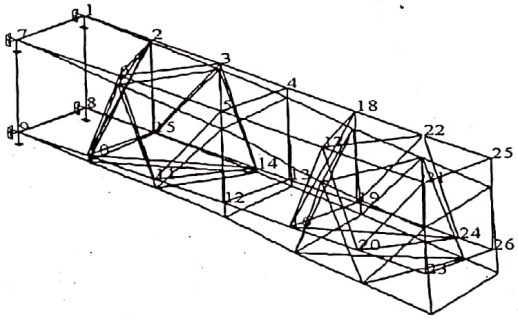
في الحالة الأولى تم نمذجة الظفر باستخدام عناصر محدودة سداسية الوجوه وعناصر محدودة هرمية رباعية الوجوه، بحيث أن عقد هذه العناصر تنطبق تماماً على ذرى العناصر المحدودة، كما هو موضح في الشكل (14).

Scanned by CamScanner



الشكل (14) الحالة الأولى

و بنتيجة التحليل حصلنا على الشكل (15) الذي يمثل مخطط تشوه الظفر:



الشكل (15) مخطط التشوه للحالة الأولى

و الجدول (1) يبين قيم التشوهات في عقد الجائز

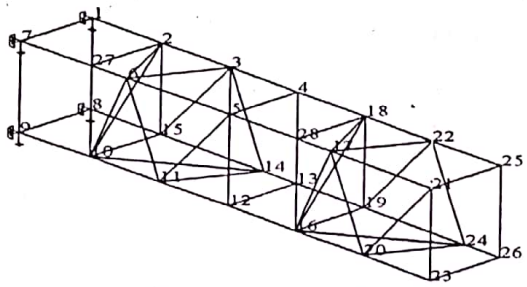
U_X (cm)	U_Y (cm)	U_Z (cm)	العقدة
0	0	0	1
0.0019	-0.0064	-0.0034	2
0.0036	-0.0061	-0.0095	3
0.0046	-0.0043	-0.0192	4
0.006	-0.0042	-0.0358	5
0.0035	-0.0058	-0.0184	6
0	0	0	7
0	0	0	8
0	0	0	9
-0.0023	0.005	-0.0146	10
-0.0045	0.0087	-0.0233	11
-0.0056	0.0121	-0.0362	12
-0.0048	0.012	-0.0191	13

Scanned by CamScanner

U_X (cm)	U_Y (cm)	U_Z (cm)	العقدة
-0.0042	0.0086	-0.0136	14
-0.0019	0.0049	-0.0035	15
-0.0066	0.0198	-0.064	16
0.0075	-0.0116	-0.0718	17
0.0056	-0.0123	-0.0321	18
-0.0057	0.0198	-0.0323	19
-0.0075	0.0217	-0.0802	20
0.0081	**-0.0099**	**-0.0974**	**21**
0.0063	-0.0113	-0.0451	22
-0.0075	0.0231	-0.0972	23
-0.0065	0.0211	-0.0517	24
0.0063	-0.01	-0.0589	25
-0.0066	0.023	-0.0589	26

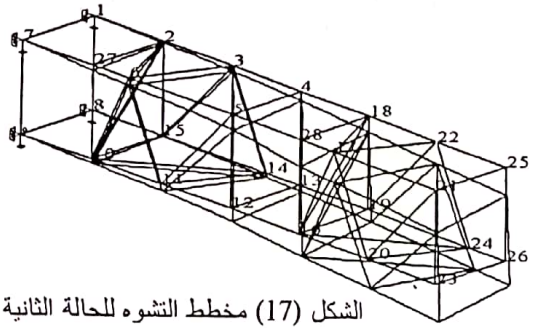
الجدول (1)

في الحالة الثانية تم إجراء تحويلات هندسية على الشبكة الهندسية المنمذجة للجائز الظفري عن طريق إضافة الذروتين 27 و 28 كما يبين الشكل (16).



الشكل (16) الحالة الثانية – إضافة ذروتين

يبين الشكل (17) مخطط التشوه للجائز الظفري المدروس في الحالة الثانية.



الشكل (17) مخطط التشوه للحالة الثانية

Scanned by CamScanner

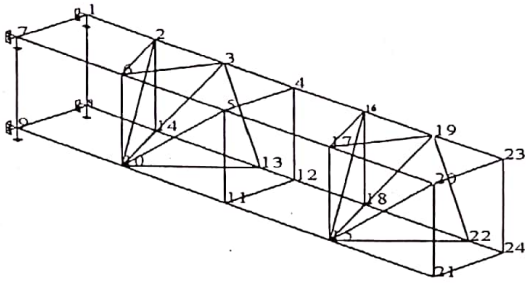
الجدول (2) يبين قيم التشوهات للجائز الظفري في الحالة الثانية.

U_X (cm)	U_Y (cm)	U_Z (cm)	العقدة
0	0	0	1
0.00207	-0.00368	-0.00368	2
0.004025	-0.01058	-0.01058	3
0.00529	-0.02174	-0.02174	4
0.0069	-0.03669	-0.03669	5
0.004025	-0.01679	-0.01679	6
0	0	0	7
0	0	0	8
0	0	0	9
-0.00276	-0.01242	-0.01242	10
-0.00518	-0.02243	-0.02243	11
-0.00644	-0.03703	-0.03703	12
-0.00541	-0.02162	-0.02162	13
-0.00483	-0.0153	-0.0153	14
-0.00207	-0.0038	-0.0038	15
-0.00759	-0.06325	-0.06325	16
0.008625	-0.07245	-0.07245	17
0.006325	-0.03646	-0.03646	18
-0.00656	-0.03669	-0.03669	19
-0.00863	-0.08188	-0.08188	20
0.009315	**-0.10166**	**-0.10166**	**21**
0.00713	-0.05118	-0.05118	22
-0.00863	-0.10143	-0.10143	23
-0.00748	-0.05877	-0.05877	24
0.007245	-0.06716	-0.06716	25
-0.00759	-0.06705	-0.06705	26
0.00276	-0.01196	-0.01196	27
0.00805	-0.06291	-0.06291	28

الجدول (2)

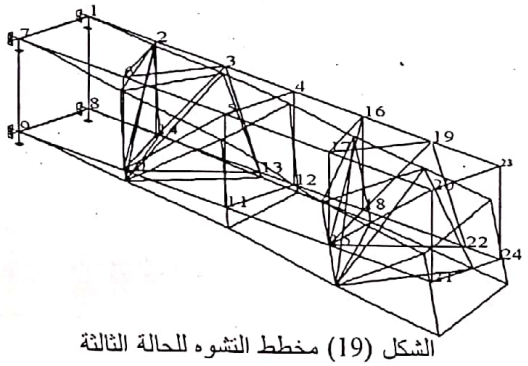
Scanned by CamScanner

في الحالة الثالثة تم إجراء تحويلات هندسية على الشبكة الهندسية المنمذجة للجائز الظفري عن طريق ضغط الحرفين 11-10 و 16-20 كما يبين الشكل (18).



الشكل (18) الحالة الثالثة – ضغط حرفين

يبين الشكل (19) مخطط التشوه للجائز الظفري المدروس في الحالة الثالثة.



الشكل (19) مخطط التشوه للحالة الثالثة

الجدول (3) يبين قيم التشوهات للجائز الظفري في الحالة الثالثة.

U_X (cm)	U_Y (cm)	U_Z (cm)	العقدة
0	0	0	1
0.0016	-0.0101	-0.00421	2
0.0029	-0.0089	-0.01178	3
0.004	-0.0173	-0.01981	4
0.0073	-0.0172	-0.0457	5
0.0037	-0.0092	-0.02579	6
0	0	0	7
0	0	0	8
0	0	0	9

Scanned by CamScanner

U_X (cm)	U_Y (cm)	U_Z (cm)	العقدة
-0.0037	0.01	-0.02607	10
-0.0055	0.0139	-0.04607	11
-0.0041	0.0139	-0.01972	12
-0.0036	0.0104	-0.01495	13
-0.0016	0.0108	-0.00411	14
-0.007	0.0276	-0.09168	15
0.0048	-0.0298	-0.03215	16
0.0087	-0.0281	-0.0914	17
-0.0049	0.0283	-0.03206	18
0.0052	-0.0265	-0.04701	19
0.0102	-0.0318	-0.11944	20
-0.0071	0.0285	-0.11935	21
-0.0056	0.0267	-0.05234	22
0.0053	-0.0318	-0.0585	23
-0.0056	0.0284	-0.0585	24

الجدول (3)

بالعودة إلى النتائج السابقة نلاحظ ما يلي:

- ❖ لم يتضح لنا فروقات هامة وملحوظة في زمن الحساب وذلك يعود إلى بساطة المنشأ وقلة عدد العناصر المستخدمة في النمذجة، أما في المنشآت الضخمة والأكثر تعقيداً حيث يكون عدد العناصر كبيراً، فإنه سوف يكون الوفر في زمن الحساب واضحاً.
- ❖ إن رقم العقدة المراد حساب قيمة السهم الشاقولي عندها هي العقدة 21 في الحالة الأولى، والعقدة 21 كذلك في الحالة الثانية، والعقدة 20 في الحالة الثالثة. وقد كانت قيمة السهم الشاقولي عند هذه العقد على التوالي: 0.0974cm- و - 0.10166cm و 0.11944cm- و الإشارة السالبة للدلالة على أن قيمة السهم الشاقولي هي بعكس الاتجاه المفروض للمحور z أي نحو الأسفل.
- ❖ نلاحظ أن قيمة السهم الشاقولي في نقطة تطبيق القوة الشاقولية في الحالتين الثانية والثالثة (بعد إجراء التحويلات الهندسية) قد اقتربت من القيمة الدقيقة للسهم.

Scanned by CamScanner

المراجع العلمية

[1] D. L. Dewhirst and P. M. Grinsell, "Joining Tetrahedra to Hexahedra," Proceedings of MSC World Users' Conference, pp., 1993.

[2] D. L. Dewhirst, S. Vangavolu, and H. Wattrick, "The Combination of Hexahedral and Tetrahedral Meshing Algorithms," Proceedings of 4th International Meshing Roundtable, pp. 291-304, 1995.

[3] C. R. Dohrmann, S. W. Key, and M. W. Heinstein, "Methods for Connecting Dissimilar Three-Dimensional Finite Element Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 1057-1080, 2000.

[4] S. J. Owen, S. A. Canann, and S. Saigal, "Pyramid Elements for Maintaining Tetrahedra to Hexahedra Conformability", *AMD Vol. 220 Trend in Unstructured Mesh Generation, ASME*, pp. 123-129, 1997.

[5] S. Yamakawa and K. Shimada, "HEXHOOP: Modular Templates for Converting a Hex-Dominant Mesh to an ALL-Hex Mesh", *Engineering with Computers*, vol. 18, pp. 211-228, 2002.

[6] S. A. Mitchell, "The All-Hex Geode-Template for Conforming a Diced Tetrahedral Mesh to any Diced Hexahedral Mesh," Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, pp. 295-305, 1998.

[7] S. Yamakawa and K. Shimada, "Hex-Dominant Mesh Generation with Directionality Control via Packing Rectangular Solid Cells," Proceedings of Geometric Modeling and Processing 2002, pp., 2002.

[8] R. J. Meyers, T. J. Tautges, and P. M. Tuchinsky, "The "Hex-Tet" Hex-Dominant Meshing Algorithm as Implemented in CUBIT," Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, pp. 151-158, 1998.

[9] P. M. Tuchinsky and B. W. Clark, "The "HexTet" Hex-Dominant Automesher: An Interim Progress Report," Proceedings of 6th International Meshing Roundtable, pp. 183-193, 1997.

[10] T. D. Blacker and R. J. Meyers, "Seams and Wedges in Plastering: A 3-D Hexahedral Mesh Generation Algorithm", *Engineering with Computers*, vol. 2, pp. 83-93, 1993.

[11] S. J. Owen and S. Saigal, "H-Morph: an Indirect Approach to Advancing Front Hex Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, pp. 289-312, 2000.

Scanned by CamScanner