تركيب سلوكيات التناظر المحوري الثاني من وجهة نظر تشيفر –اغناك للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب ذي 5 ثوابت مادية

*د. وعد سمير عطية   ** أ.د. منتجب الحسن

الملخص:

تكمن أهمية البحث بأنه يزودنا بطريقة تحليلية جديدة لحل معادلات اغناتشاك التنسورية التي تصف الحالة الديناميكية المرنة ذات التناظر المحوري الثاني للانفعالات للجسم الصلب دقيق الاستقطاب المتجانس والمتماثل المناحي والمعين ب 5 ثوابت مادية من نوع Erigen–Nowacki ، والذي نرمز له اختصارا بالرمز $(E-N:5)$ (أسطوانة معدنية صماء , نحاسية أو حديدية أو من الألمنيوم ، .....الخ) .

ويتعلق البحث بالنموذج الرياضي لحالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق $(E-N:5)$

يقدم هذا البحث طريقة تشيفر التنسورية في حل مسألة التناظر المحوري الثانية من نوع إغناتشاك للجسم الصلب المرن المدروس $(E-N:5)$

وسننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة .

***عضو هيئة تدريسية في الجامعة الوطنية الخاصة**

****أستاذ في قسم الرياضيات في كلية العلوم بجامعة البعث .**

الكلمات المفتاحية :

حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن $(E-N:5)$

معادلات الإجهادات التنسورية – تنسور تشيفر المعمم .

Decomposition of the second axisymmetric behaviors from the view of Schafer–Ignaczak for the micropolar elastic solid of 5 material constants

*Dr .waad Samir attiah ** Prof. Mountajab Al Hasan

Summary:

The paper importance consists in providing us with new analytical method for solving Ignaczak dynamical tensor equation ,describing the second axially symmetric dynamical state of elastic strains in micropolar , homogeneous ,isotropic , elastic body with 5 material constants and of Eringen –Nowacki type , shortly called $(E-N:5)$

(coper , iron ,..,aluminum full celiner)

This paper concrrns the mathematical model of the second axially symmetric state of elastic strains of micropolar $(E-N:5)$ elastic solid ,we discuss the generalized Schafer tensor method in solving the second axially symmetric problem of Ignaczak type for the conssidrable $(E-N:5)$ body .

Finally , we put several problem for discussing .

*Doctor in applied mathematics in Al Watanyia Private University .

**Professor in applied mathematics in Department of mathematics ,AL –Baath University,

Key words:

The second axially symmetric state of elastic strains

The micropolar elastic solid $(E-N:5)$

Stress tensor , equations, generalized Schafer tensor

أ_ مقدمة (Introduction) :

تم استخدام طريقة متجه تشيفر في مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن $(E-N:5)$ انطلاقا" من متجه تشيفر $\xi=\left(0,0,\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}\right)$ حيث : $(\alpha,\beta=1,2)$ مع العلم أن $\in_{\alpha\beta}$ هي المركبات الديكارتية لتنسور ليفي – تشيفيتا النسبي بالوزن $\frac{1}{2}$ في الفضاء الإقليدي ثنائي البعد $\mathbb{R}^2$ [4,5]

بنفس الطريقة تم حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ثنائية الأبعاد , والمتناظرة محوريا" للانفعالات المرنة للجسم من النوع $(E-N:5)$ [1,2,5].

ونوه نفس الباحث إلى إمكانية حل هذه المسائل (مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ثنائية البعد وتحديد ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من نوع $(E-N:6)$ وذلك بوجود حقل درجات الحرارة .

بعدها قام الباحث دييشليفيش باستخدام طريقة متجه تشيفر في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات لامي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم من نوع $(E-N:5)$ بما يتناسب مع الحالة الترموديناميكية الغير متساوية درجات الحرارة في الجسم , وفي العام 1997 أثبت الباحث ديشليفيتش أنه يمكن وصف السلوك الديناميكي المرن للجسم $(E-N:5)$ في حالة التناظر المحوري الثاني للانفعالات من خلال نظام المعادلات بإجهادات القوة , وإجهادات العزم مضافا" إلى ذلك شروط حدية وابتدائية (تحقق توافق الانفعالات) مع باقي العلاقات التي باقي الحقول بدلالة الإجهادات (انظر أيضا" [1])

2- هدف وأهمية البحث :

أ- يهدف البحث تزويد عملية معادلات الإجهادات للجسم $(E-N:5)$ ضمن حالة التناظر المحوري الثانية بطريقة تحليلية جديدة تسهل حل هذه المعادلات، وهي ناتجة عن تعميم طريقة مقطع تشيفر المتجهي.

ب- تكمن أهمية البحث بإمكانية إيجاد السلوك الديناميكي للجسم $(E-N:5)$ ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة (أسطوانة معدنية صماء من الحديد أو الألمنيوم أو النحاس) .

3- طرق وأدوات البحث :

سنقوم بإستنتاج طريقة حل جديدة لمعادلات الإجهادات ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات الديناميكية المرنة للجسم $(E-N:6)$ من خلال تعميم مقطع تشيفر المتجهي [1,5] إلى مقطع تشيفر التنسوري المتناظر الذي سنكتبه في النظام الإحداثي الأسطواني مما يتناسب مع شكل الجسم .

ومن أجل متطلبات المسألة يلزمنا مايلي : قمنا بعرض نتائج البحث [3]حول معادلات الإجهادات للجسم $(E-N:5)$ ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة له .

توطئة :

لنعتبر جملة المقارنة الديكارتية العطالية $Ox_1x_2x_3$ ذات القاعدة الديكارتية (e_1,e_2,e_3) , ولنعتبر القاعدة الأسطوانية الموافقة (e_r,e_θ,e_z) , ولنعتبر أيضا" الإحداثيات الأسطوانية (r,θ,z) لنقطة مادية لاغرانجية P من الجسم المرن المدروس ,ولنرمز ب Ω للمنطقة بسيطة الترابط والمحدودة في $\mathbb{R}^3$ والتي تمثل شكل الجسم في اللحظة الابتدائية $t=0$ ولنرمز ب $\partial\Omega$ للحدود الملساء للجسم المعتبر $(E-N:5)$, وكما نرمز ب $T=[0,\infty[,T_+=]0,\infty[$

عندئذ تتحدد الحالة الديناميكية المرنة دقيقة الاستقطاب للجسم المعتبر بواسطة كمونه الحقول التنسورية $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$ حيث أن : $\boldsymbol{\varphi},\mathbf{u}$ هما حقلان متجهيان مستقلان وهما على الترتيب حقل الإزاحة وحقل التوجه , وكما أن $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa}$ هي حقول تنسورية من المرتبة الثانية وغير متناظرة وتمثل على الترتيب حقل إجهادات القوة, حقل إجهادات العزم, حقل انفعالات القوة, وحقل انفعالات العزم.

في حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم المعتبر $(E-N:5)$ نكون بحسب التعريف تكون الحقول الفيزيائية الحاكمة لسلوك الجسم، تكون مستقلة عن الإحداثي الأسطواني θ .

ويمكن في هذه الحالة تمثيل الحقول الفيزيائية السابقة في النظام الإحداثي الأسطواني $(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_z)$ وفي $\Omega\times T_+$ على الشكل :

$$\mathbf{u}\equiv(0,u_\theta,0),\boldsymbol{\varphi}\equiv(\varphi_r,0,\varphi_z), \qquad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{bmatrix}0 & \sigma_{r\theta} & 0\\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z}\\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\mu}\equiv\begin{bmatrix}\mu_{rr} & 0 & \mu_{rz}\\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0\\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz}\end{bmatrix}, \qquad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{r\theta} & 0 \\ \gamma_{\theta r} & 0 & \gamma_{\theta z} \\ 0 & \gamma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{rr} & 0 & \kappa_{rz} \\ 0 & \kappa_{\theta\theta} & 0 \\ \kappa_{zr} & 0 & \kappa_{zz} \end{bmatrix}, \qquad (3.3)$$

هنا نشير إلى أن المركبات المذكورة في العلاقات السابقة تتبع فقط للموضع (r,z) .

مسألة معادلات الإجهادات للجسم $(5: E-N)$ ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة:

-**<u>تتألف هذه المسألة من</u> :**

- **معادلات الحركة بالإجهادات والمحققة في** $\Omega \times T_+$:

$$2\gamma J^{-1}\partial_r R_r - \ddot{\mu}_{rr} + \beta\,\ddot{\kappa} = 0,$$

$$2\gamma J^{-1} r^{-1} R_r - \ddot{\mu}_{\theta\theta} + \beta\,\ddot{\kappa} = 0,$$

$$2\gamma J^{-1}\partial_z R_z - \ddot{\mu}_{zz} + \beta\,\ddot{\kappa} = 0,$$

$$J^{-1}\partial_Z R_r - \frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}_{(rz)} + \frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}_{[rz]} = 0,$$

$$J^{-1}\partial_r R_z - \frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}_{(rz)} + \frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}_{[rz]} = 0,$$

$$J^{-1} R_r - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\theta z)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\theta z]} = 0,$$

$$\rho^{-1}\partial_r R_\theta - J^{-1} R_z - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(r\theta)} - \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[r\theta]} = 0,$$

$$J^{-1} R_z - \rho^{-1} r^{-1} R_\theta - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(r\theta)} - \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[r\theta]} = 0,$$

$$\rho^{-1}\partial_z R_\theta - J^{-1} R_r - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\theta z)} - \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\theta z]} = 0, \qquad (3.3)$$

حيث : $\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial r}, \partial_z = \dfrac{\partial}{\partial z}, \ddot{\kappa} = \dfrac{1}{2\gamma + 3\beta}\left(\ddot{\mu}_{rr} + \ddot{\mu}_{\theta\theta} + \ddot{\mu}_{zz}\right)$

كما أن :

$\mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J$ هي ثوابت موجبة , وتمثل الثوابت المادية للجسم , الأقواس الدليلية: [..] ,(...) على الترتيب تمثل الجزء المتناظر , والجزء المتناظر عكسيا للتنسور؛ مثلا" : $\mu_{[rz]} = \frac{1}{2}(\mu_{rz} - \mu_{zr}), \mu_{(rz)} = \frac{1}{2}(\mu_{rz} + \mu_{zr}),$.إضافة إلى ما تقدم ذكره, نضيف بأن:

$$R_r = \hat{R}_r + Y_r, R_z = \hat{R}_z + Y_z, R_\theta = \hat{R}_\theta + X_\theta,$$

علما" أن :

$$\hat{R}_r = 2\sigma_{[\theta z]} + \partial_r \mu_{rr} + \partial_z \mu_{zr} + r^{-1}(\mu_{rr} - \mu_{\theta\theta}),$$

$$\hat{R}_z = 2\sigma_{[r\theta]} + (r^{-1} + \partial_r)\mu_{rz} + \partial_z \mu_{zz},$$

$$\hat{R}_\theta = \partial_r \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{z\theta} + 2r^{-1}\sigma_{(r\theta)},$$

كما أن: $\mathbf{X} \equiv (0, X_\theta, 0)$ تمثل القوة الحجمية المؤثرة في الجسم, $\mathbf{Y} \equiv (Y_r, 0, Y_z)$ يمثل العزم الحجمي في الجسم.

- **الشروط الحدية المحققة على** $\partial\Omega \times T$:

$$n_r \mu_{rr} + n_z \mu_{zr} = m_r,$$
$$n_r \mu_{rz} + n_z \mu_{zz} = m_z, \qquad (3.5)$$
$$n_r \sigma_{r\theta} + n_z \sigma_{z\theta} = p_\theta,$$

حيث الدوال $m_r, p_\theta, m_z : \partial\Omega \times T \to R$ معلومة , وكما أن $\partial\Omega$ هي الحدود الملساء ل Ω $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$,

- **الشروط الابتدائية المحققة في** $\Omega \times \{0\}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{(0)}, \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}, \dot{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}, \qquad (3.6)$$

حيث :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^{(0)}{}_{r\theta} & 0 \\ \sigma^{(0)}{}_{\theta r} & 0 & \sigma^{(0)}{}_{\theta z} \\ 0 & \sigma^{(0)}{}_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \mu^{(0)}{}_{rr} & 0 & \mu^{(0)}{}_{rz} \\ 0 & \mu^{(0)}{}_{\theta\theta} & 0 \\ \mu^{(0)}{}_{zr} & 0 & \mu^{(0)}{}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \dot{\sigma}^{(0)}_{r\theta} & 0 \\ \dot{\sigma}^{(0)}_{\theta r} & 0 & \dot{\sigma}^{(0)}_{\theta z} \\ 0 & \dot{\sigma}^{(0)}_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mu}^{(0)}_{rr} & 0 & \dot{\mu}^{(0)}_{rz} \\ 0 & \dot{\mu}^{(0)}_{\theta\theta} & 0 \\ \dot{\mu}^{(0)}_{zr} & 0 & \dot{\mu}^{(0)}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

مع العلم أن :

$$\left[\mu^{(0)}_{rr}, \mu^{(0)}_{\theta\theta}, \mu^{(0)}_{zz}\right] = 2\gamma\left(\partial_r h_r, r^{-1} h_r, \partial_z h_z\right) + \beta\kappa^{(0)},$$

$$\left[\mu^{(0)}_{rz}, \mu^{(0)}_{zr}\right] = (\gamma+\varepsilon)(\partial_r h_z, \partial_z h_r) + (\gamma+\varepsilon)(\partial_z h_r, \partial_r h_z),$$

$$\left[\sigma^{(0)}_{r\theta}, \sigma^{(0)}_{\theta r}\right] = (\mu+\alpha)\left(\gamma^{(0)}_{r\theta}, \gamma^{(0)}_{\theta r}\right) + (\mu-\alpha)\left[\gamma^{(0)}_{\theta r}, \gamma^{(0)}_{r\theta}\right],$$

$$\left[\sigma^{(0)}_{\theta z}, \sigma^{(0)}_{\theta z}\right] = (\mu+\alpha)\left(\gamma^{(0)}_{\theta z}, \gamma^{(0)}_{z\theta}\right) + (\mu-\alpha)\left[\gamma^{(0)}_{z\theta}, \gamma^{(0)}_{\theta z}\right], \quad (3.9)$$

$$\gamma^{(0)}_{r\theta} = \partial_r h_\theta - h_z, \gamma^{(0)}_{\theta r} = -r^{-1} h_\theta + h_z, \gamma^{(0)}_{z\theta} = \partial_z h_\theta + h_r,$$

$$\gamma^{(0)}_{\theta z} = -h_r, \kappa^{(0)} = \left(r^{-1} + \partial_r\right) h_r + \partial_z h_z,$$

كما أن:

$$\left[\dot{\mu}^{(0)}_{rr}, \dot{\mu}^{(0)}_{\theta\theta}, \dot{\mu}^{(0)}_{zz}\right] = 2\gamma\left(\partial_r h_r, r^{-1} h_r, \partial_z h_z\right) + \beta\dot{\kappa}^{(0)},$$

$$\left[\dot{\mu}^{(0)}_{rz}, \dot{\mu}^{(0)}_{zr}\right] = (\gamma+\varepsilon)(\partial_r l_z, \partial_z l_r) + (\gamma-\varepsilon)(\partial_z l_r, \partial_r l_z),$$

$$\left[\dot{\sigma}^{(0)}_{r\theta}, \dot{\sigma}^{(0)}_{\theta r}\right] = (\mu+\alpha)\left(\dot{\gamma}^{(0)}_{r\theta}, \dot{\gamma}^{(0)}_{\theta r}\right) + (\mu-\alpha)\left[\dot{\gamma}^{(0)}_{\theta r}, \dot{\gamma}^{(0)}_{r\theta}\right], \quad (3.10)$$

$$\left[\dot{\sigma}^{(0)}_{\theta z}, \dot{\sigma}^{(0)}_{z\theta}\right] = (\mu+\alpha)\left(\dot{\gamma}^{(0)}_{\theta z}, \dot{\gamma}^{(0)}_{z\theta}\right) + (\mu-\alpha)\left[\dot{\gamma}^{(0)}_{z\theta}, \dot{\gamma}^{(0)}_{\theta z}\right],$$

$$\dot{\gamma}^{(0)}_{r\theta} = \partial_r l_\theta - l_z, \dot{\gamma}^{(0)}_{\theta r} = -r^{-1} l_\theta + l_z, \dot{\gamma}^{(0)}_{z\theta} = \partial_z l_\theta + l_r,$$

$$\dot{\gamma}^{(0)}_{\theta z} = -l_r, \dot{\kappa}^{(0)} = \left(r^{-1} + \partial_r\right) l_r + \partial_z l_z,$$

- العلاقات التأسيسية العكسية المحققة في $\Omega \times T$:

$$
\begin{aligned}
&2\gamma \kappa_{rr} = \mu_{rr} - \beta \kappa, \\
&2\gamma \kappa_{\theta\theta} = \mu_{\theta\theta} - \beta \kappa, \\
&2\gamma \kappa_{zz} = \mu_{zz} - \beta \kappa, \\
&\left(\kappa_{rz}, \kappa_{zr}\right) = \frac{1}{2\gamma}\mu_{(rz)} \pm \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[rz]}, \\
&\left(\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta r}\right) = \frac{1}{2\mu}\sigma_{(r\theta)} \pm \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[r\theta]}, \\
&\left(\gamma_{\theta z}, \gamma_{z\theta}\right) = \frac{1}{2\mu}\sigma_{(\theta z)} \pm \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[\theta z]},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

حيث: $\kappa = \dfrac{1}{2\gamma + 3\beta}\left(\mu_{rr} + \mu_{\theta\theta} + \mu_{zz}\right)$

- العلاقات التي تعطي الدورانات والإزاحة بدلالة الإجهادات، والمحققة في $\Omega \times T$:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_r = l_r t + h_r + J^{-1}\left(t * R_r\right), \\
&\varphi_z = l_z t + h_z + J^{-1}\left(t * R_z\right), \\
&u_r = l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta\right),
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

حيث: * يدل على الطي بالنسبة للزمن t ([7]): $t * f\left(r, z, t\right) = \int_0^t \left(t - \tau\right) f\left(r, z, \tau\right) d\tau$

4 – النتائج والمناقشة :

مسألة التناظر المحوري الثاني من نمط تشيفر –إغناتشاك للجسم الصلب المرن المعتبر $(E - N : 5)$ الذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط والمحدودة في $\mathbb{R}^3$:

في مسألة إغناتشاك (3.12)–(3.1) للجسم المعتبر $(E - N : 5)$سنفرض أن :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}', \\
&\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}', \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}',
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

حيث الحقول : $\left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0\right)$ تتعلق بمسألة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة في المرونة الخطية الديناميكية التقليدية (نموذج هوك المتساوي درجات الحرارة في إطار التناظر المحوري الثاني للانفعالات المرنة للجسم المعتبر)، أماالحقول: $\left(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}'\right), \mathbf{Y}'$ فهي الحقول المتممة أو الزائدة عن حقول جسم هوك المتساوي درجات الحرارة.

أ_ نعمم طريقة متجه تشيفر المتجهية إلى طريقة مقطع تشيفر المتجهي للجسم $(E-N:5)$:

لهذا الغرض تلزمنا التعاريف التالية:

<u>تعريف 1</u> : مقطع تشيفر التنسوري لمسألة إغناتشاك للجسم $(E-N:5)$، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة له: نسمي المقطع التنسوري المتناظر $\boldsymbol{\zeta}$ المعطى أسطوانياً بـ :

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{r\theta} & 0 \\ \zeta_{\theta r} & 0 & \zeta_{\theta z} \\ 0 & \zeta_{z\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

المعطى بالعلاقات :

$$\begin{aligned} \zeta_{r\theta} &= -\frac{1}{2}\rho^{-1}\left(r^{-1}-\partial_r\right)R_\theta - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}\left(r\theta\right), \\ \zeta_{\theta z} &= \frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}\left(\theta z\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

نسميه مقطع تشيفر التنسوري الموافق لمسألة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن $(E-N:5)$، حيث المسألة من نمط إغناتشاك .

<u>تعريف2: (المقطع التنسوري المرافق لمقطع تشيفر التنسوري $\boldsymbol{\chi}$)</u>:

نسمي المقطع التنسوري المتناظر عكسياً $\boldsymbol{\chi}$ والمعطى أسطوانيا" بـ :

$$\boldsymbol{\chi} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \chi_{r\theta} & 0 \\ \chi_{\theta r} & 0 & \chi_{\theta z} \\ 0 & \chi_{z\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

حيث:

$$\chi_{r\theta} = \frac{1}{2}\rho^{-1}\left(r^{-1} + \partial_r\right)R_\theta - J^{-1}R_z - \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[r\theta]},$$

$$\chi_{\theta z} = -\frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta - J^{-1}R_r - \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\theta z]},$$

$$\chi_{\theta r} = -\chi_{r\theta}, \chi_{z\theta} = -\chi_{\theta z},$$

ندعوه بالمقطع التنسوري المرافق لمقطع تشيفر التنسوري $\boldsymbol{\zeta}$ لأجل حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن المعتبر $(E-N:5)$:

نتيجة1:

من تعريف المقطعين التنسوريين السابقين $\boldsymbol{\chi}$ و $\boldsymbol{\zeta}$ مباشرة ينتج أن المعادلات الأربع الأخيرة: $(3.4)_{6-9}$ تكتب باستخدام المقطعين التنسوريين: $\boldsymbol{\chi}$ و $\boldsymbol{\zeta}$ على الشكل :

$$\begin{aligned} \zeta_{\theta z} + \chi_{\theta z} &= 0, \\ \zeta_{z\theta} - \chi_{z\theta} &= 0, \\ \zeta_{r\theta} + \chi_{r\theta} &= 0, \\ \zeta_{\theta r} + \chi_{\theta r} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

وإذا كتبنا:

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^0 + \boldsymbol{\zeta}' \tag{4.6}$$

أي :

$$\begin{aligned} \zeta_{r\theta} &= \zeta_{r\theta}{}^0 + \zeta'_{r\theta}, \\ \zeta_{\theta z} &= \zeta_{\theta z}{}^0 + \zeta'_{\theta z}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

حيث ζ^0 أي $\left(\zeta_{r\theta}, \zeta_{\theta r}\right)$ هو الجزء الديكارتي و $\boldsymbol{\zeta}'$ أي $\left(\zeta'_{\theta z}, \zeta'_{z\theta}\right)$ هو الجزء المتمم ζ .

نحصل الآن على معادلات إغناتشاك الكلاسيكية لأجل حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة بالتوابع التقليدية المجهولة $\sigma^0_{r\theta}=\sigma^0_{\theta r}, \sigma^0_{\theta z}=\sigma^0_{z\theta}$ وذلك بوضع $\boldsymbol{\zeta}^0=\mathbf{0}$ ؛ أي بوضع $\zeta^0_{r\theta}=0, \zeta^0_{\theta z}=0,$ ، في المعادلات (4.3) ، فنحصل على:

معادلات إغناتشاك الكلاسيكية للجملة والمحققة في $\Omega\times T$:

$$
\begin{aligned}
&\hat{c}_2^2\left(r^{-1}-\partial_r\right)R^0_\theta+\ddot{\sigma}^0_{r\theta}=0,\\
&\hat{c}_2^2\partial_z R^0_\theta+\ddot{\sigma}^0_{\theta z}=0,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

حيث :

$$
\hat{c}_2^2=\frac{\mu}{\rho}, R^0_\theta=\hat{R}^0_\theta+X_\theta,
$$

$$
\hat{R}^0_\theta=\partial_r\sigma^0_{r\theta}+\partial_z\sigma^0_{z\theta}+2r^{-1}\sigma^0_{r\theta}=\left(2r^{-1}+\partial_r\right)\sigma^0_{r\theta}+\partial_z\sigma^0_{z\theta}
$$

وهنا نشير إلى أننا أخذنا بالحسبان تناظر مقطع الإجهادات التنسوري التقليدي $\boldsymbol{\sigma}^0$ أي:

$.(\sigma^0_{r\theta}=\sigma^0_{\theta r}, \sigma^0_{\theta z}=\sigma^0_{z\theta})$

من الشروط الحدية (3.5)، نحصل على الشروط الحدية التالية ، لأجل جملة المعادلتين(4.8):

$$
n_r\sigma^0_{r\theta}+n_z\sigma^0_{z\theta}=p_\theta \tag{4.9}
$$

ومن الشروط الابتدائية (3.10) و(3.9) نحصل على الشروط الابتدائية الكلاسيكية التالية لأجل حقل الإجهادات الكلاسيكية σ^0 المحقق لجملة المعادلتين(4.8):

$$
\boldsymbol{\sigma}^0=\mathbf{sym}\;\boldsymbol{\sigma}^{(0)},\;\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0=\mathbf{sym}\;\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}, \tag{4.10}
$$

حيث: **sym** يدل على الجزء التناظري ، وبالتالي تأخذ الشروط الابتدائية السابقة الشكل الأسطواني التالي في $\boldsymbol{\Omega}\times\{0\}$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma^0_{r\theta}=\sigma^{(0)}_{(r\theta)}, \sigma^0_{\theta z}=\sigma^{(0)}_{(\theta z)},\\
&\dot{\sigma}^0_{r\theta}=\dot{\sigma}^{(0)}_{(r\theta)}, \dot{\sigma}^0_{\theta z}=\dot{\sigma}^{(0)}_{(\theta z)},
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

حيث هنا :

$$\sigma_{(r\theta)}^{(0)} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}^{(0)}, \sigma_{(\theta z)}^{(0)} = 2\mu\varepsilon_{\theta z}^{(0)},$$
$$\varepsilon_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(r^{-1} - \partial_r\right)h_\theta, \varepsilon_{\theta z}^{(0)} = \frac{1}{2}\partial_z h_\theta, \tag{4.12}$$

وأيضاً :

$$\dot{\sigma}_{(r\theta)}^{(0)} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)}, \dot{\sigma}_{(\theta z)}^{(0)} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{\theta z}^{(0)},$$
$$\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(r^{-1} - \partial_r\right)l_\theta, \dot{\varepsilon}_{\theta z}^{(0)} = \frac{1}{2}\partial_z l_\theta, \tag{4.13}$$

كما نحصل من العلاقات التأسيسية العكسية $\left(3.11\right)_{5,6}$ على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية محلولة بالنسبة للانفعالات الكلاسيكية $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ والمحققة في $\Omega\times T$:

$$2\mu\varepsilon_{r\theta}^0 = \sigma_{r\theta}^0, 2\mu\varepsilon_{\theta z}^0 = \sigma_{\theta z}^0, \tag{4.14}$$

كما نحصل من العلاقات التأسيسية العكسية $\left(3.11\right)_{1\to4}$ على العلاقات التأسيسية محلولة بالنسبة لانفعالات العزم الكلاسيكية في $\Omega\times T$:

$$2\gamma\,\kappa_{rr}^0 = \mu_{rr}^0 - \beta\,\kappa^0,$$
$$2\gamma\,\kappa_{\theta\theta}^0 = \mu_{\theta\theta}^0 - \beta\,\kappa^0, \tag{4.15}$$
$$2\gamma\kappa_{zz}^0 = \mu_{zz}^0 - \beta\kappa^0,$$
$$\left(\kappa_{rz}^0, \kappa_{zr}^0\right) = \frac{1}{2\gamma}\mu_{(rz)}^0 \pm \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[rz]}^0,$$

علماً أن :
$$\kappa^0 = \frac{1}{2\gamma+3\beta}\left(\mu_{rr}^0 + \mu_{\theta\theta}^0 + \mu_{zz}^0\right) = 0$$

ينتج من العلاقات (3.12) ومن التعريف التاي للدورانات الكلاسيكية φ_r^0 , φ_z^0 [1,3]:

$$\varphi_r^0 = -\frac{1}{2}\partial_z u_\theta^0, \varphi_z^0 = \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right)u_\theta^0, \tag{4.16}$$

أن :

العلاقات التي تعطينا الإزاحة الكلاسيكية $\mathbf{u}^0$ والدوران الكلاسيكي $\boldsymbol{\varphi}^0$ وفقاً لوصف إغناتشاك ، تأخذ الشكل التالي في $\Omega\times T$:

$$\varphi_r^0 = -\frac{1}{2}\partial_z\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

$$\varphi_Z^0 = -\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right], \qquad (4.17)$$

$$u_\theta^0 = l_\theta t + h_\theta + \rho\left(t * R_\theta^0\right),$$

كما نعين انفعالات العزم الكلاسيكية $\boldsymbol{\kappa}^0$ من العلاقات التالية المحققة في $\Omega\times T$ [1,3,5]:

$$\kappa_{rr}^0 = -\frac{1}{2}\partial^2{}_{rz}\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

$$\kappa_{\theta\theta}^0 = -\frac{1}{2}r^{-1}\partial_z\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

$$\kappa_{zz}^0 = \frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right], \qquad (4.18)$$

$$\kappa_{rz}^0 = \frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_r\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

$$\kappa_{zr}^0 = -\frac{1}{2}\partial^2{}_z\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

إن معادلات الحركة بالإجهادات التقليدية (4.8) تملك الشكل الكلي التفاضلي التالي في $\Omega\times T$:

$$\begin{aligned}&\hat{c}_2^2\left(r^{-1}-\partial_r\right)\left(t * R_\theta^0\right)+\sigma_{r\theta}^0 = -\mu\left(r^{-1}-\partial_r\right)\left(l_\theta t + h_\theta\right),\\&\hat{c}_2^2\partial_z\left(t * R_\theta^0\right)-\sigma_{\theta z}^0 = -\mu\partial_z\left(l_\theta t + h_\theta\right),\end{aligned} \qquad (4.19)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن المعادلة السابقة (4.19) تكافئ مسألة القيم الابتدائية(4.13)،(4.10)،(4.8).

بهدف إيجاد معادلات الحقول الزائدة: $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$ تلزمنا المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة :

ينتج من المعادلات الكلاسيكية، التكاملية ، التفاضلية(4.19) وعن العلاقات (4.15) و (4.18)،أن الحقول الكلاسيكية $\left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0\right)$ تحقق المعادلات التالية :

1) المعادلة التالية في $\Omega \times T$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right] + X_\theta = 0\,, \tag{4.20}$$

حيث: $\Delta_0 = \Delta - r^{-2}$ ، $\overset{*}{\square}{}_2^0 = \mu\,\Delta_0 - \rho\,\partial_t^2$، أما Δ فهو مؤثر لابلاس السلمي في الإحداثيات الأسطوانية لأجل حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم المدروس $\Delta = \left(r^{-1} + \partial_r\right)\partial_r + \partial_z^2$

2) المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}&\overset{*}{\square}{}_2\left[2\gamma J^{-1}\left(r^{-1} + \partial_r\right)\hat{R}_r^0\left(\ddot{\mu}_{rr}^0 + \ddot{\mu}_{\theta\theta}^0\right)\right]\\ &\qquad = J^{-1}\gamma\,\overset{*}{\square}{}_4\left(r^{-1} + \partial_r\right)\partial_z X_\theta\end{aligned} \tag{4.21}$$

حيث: $\overset{*}{\square}{}_2 = \mu\,\Delta - \rho\,\partial_t^2$ و $\overset{*}{\square}{}_4 = \left(\gamma + \varepsilon\right)\Delta - J\,\partial_t^2$ ؛

3) المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\overset{*}{\square}{}_2\left[2\gamma J^{-1}\partial_z \hat{R}_z^0 - \ddot{\mu}_{zz}^0\right] = J^{-1}\gamma\,\overset{*}{\square}{}_4\left(r^{-1} + \partial_r\right)\partial_z X_\theta, \tag{4.22}$$

4) المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left\{J^{-1}\partial_z \hat{R}_r^0 - \frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}_{(rz)}^0 + \frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}_{[rz]}^0\right\} = \frac{1}{2}J^{-1}\,\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_Z^0 X_\theta, \tag{4.23}$$

5) المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left(J^{-1}\hat{R}_r^0 - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{\theta Z}^0\right) = \frac{1}{2}J^{-1}\,\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_Z X_\theta, \tag{4.24}$$

6) المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}_{2}\left[\rho^{-1}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)R_{\theta}^{0}-2J^{-1}\hat{R}_{z}^{0}\right]=J^{-1}\overset{*}{\square}_{4}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)X_{\theta}, \quad (4.24)$$

7) المعادلة التالية المحققة في $\Omega\times T_{+}$:

$$\overset{*}{\square}{}_{2}^{0}\left(\rho^{-1}\partial_{z}R_{\theta}^{0}+J^{-1}\hat{R}_{r}^{0}-\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{\theta z}^{0}\right)=\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}{}_{4}^{0}\partial_{z}X_{\theta}, \quad (4.25)$$

البرهان :

1 . بتطبيق المؤثر $2r^{-1}+\partial_{r}$ على طرفي المعادلة $(4.19)_{1}$ والمؤثر ∂_{z} على طرفي المعادلة $(4.19)_{2}$، ومن ثم الجمع والأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\left(2r^{-1}+\partial_{r}\right)\left(r^{-1}-\partial_{r}\right)=-\left[\left(\partial_{r}^{2}+r^{-1}\partial_{r}\right)-r^{-2}\right], \quad (4.26)$$

نحصل بالنتيجة على المعادلة التالية المحققة في $\Omega\times T$:

$$-\overset{*}{\square}{}_{2}^{0}\left[l_{\theta}t+h_{\theta}+\rho^{-1}\left(t*R_{\theta}^{0}\right)\right]-X_{\theta}=0,$$

والتي هي نفسها (4.20).

2. ينتج عن $(4.15)_{1,2}$ و $(4.18)_{1,3}$ وعن العلاقات (4.14)، $(4.17)_{1}$، أن :

$$2\gamma J^{-1}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\hat{R}_{r}^{0}-\left(\ddot{\mu}_{rr}^{0}+\ddot{\mu}_{\theta\theta}^{0}\right)=$$

$$2\gamma J^{-1}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\hat{R}_{r}^{0}-2\gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\partial_{z}\rho^{-1}R_{\theta}^{0}=$$

$$=2\gamma\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\left[J^{-1}\hat{R}_{r}^{0}+\frac{1}{2}\partial_{z}\rho^{-1}R_{\theta}^{0}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}2\gamma\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\partial_{z}\overset{*}{\square}{}_{4}^{0}\left[l_{\theta}t+h_{\theta}+\rho^{-1}\left(t*R_{\theta}^{0}\right)\right]$$

أو

$$2\gamma J^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\hat{R}_r^0-\left(\ddot{\mu}_{rr}^0+\ddot{\mu}_{\theta\theta}^0\right)=$$

$$=-\gamma\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z \overset{*}{\square}_4^0\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right],$$

وأخيراً بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة السابقة ،ومن ثم بالأخذ بعين الاعتبار كلاً من العلاقة :

$$\left(r^{-1}+\partial_r\right)\overset{*}{\square}_2^0=\overset{*}{\square}_2\left(r^{-1}+\partial_r\right) \tag{4.27}$$

والمعادلة (4.20)، نحصل مباشرة على المعادلة (4.21).

3. لدينا:

$$2\gamma J^{-1}\partial_z\hat{R}_z^0-\ddot{\mu}_{zz}^0 =$$

$$=2\gamma J^{-1}\partial_z\hat{R}_z^0-2\gamma\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right]^{\bullet\bullet}$$

$$=2\gamma\partial_z\left[J^{-1}R_z^0-\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\rho^{-1}R_\theta^0\right]$$

$$=2\gamma J^{-1}\overset{*}{\square}_4\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right]$$

$$=\gamma J^{-1}\overset{*}{\square}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right],$$

أو

$$2\gamma J^{-1}\partial_z\hat{R}_z^0-\ddot{\mu}_{zz}^0=\gamma J^{-1}\overset{*}{\square}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)\partial_z\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right], \tag{4.28}$$

بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة السابقة (4.28), ومن ثم بأخذ العلاقة (4.27)، بعين الاعتبار فنحصل على المعادلة (4.22) مباشرةً .

4. لدينا :

$$J^{-1}\partial_z \hat{R}_r^0 - \frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}^0_{(rz)} + \frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}^0_{[rz]} =$$

$$= J^{-1}\partial_z \hat{R}_r^0 + \frac{1}{2}\partial_z^2\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right]^{\bullet\bullet}$$

$$= \partial_z\left(J^{-1}\hat{R}_r^0 + \frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0\right)$$

$$= J^{-1}\overset{*}{\square}{}_4^0\left\{-\frac{1}{2}\partial_z^2\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_z^2\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right],$$

أو

$$J^{-1}\partial_z \hat{R}_r^0 - \frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}^0_{(rz)} + \frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}^0_{[rz]} =$$

$$= -\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_z^2\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right], \qquad (4.29)$$

وأخيراً بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة (4.29) ، ومن ثم بالاستفادة من المعادلة (4.20)، نحصل مباشرةً على المعادلة (4.23).

5 . لدينا:

$$J^{-1}\hat{R}_r^0 + \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}^0_{\theta z} = J^{-1}\hat{R}_r^0 + \frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0 =$$

$$= -\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_z\left[l_\theta t + h_\theta + \rho^{-1}\left(t * R_\theta^0\right)\right], \qquad (4.30)$$

وبالتالي بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة السابقة ، من ثم بالأخذ بعين الاعتبار المعادلة (4.20) نحصل مباشرةً على المعادلة (4.24).

6 . لدينا:

$$\rho^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)R_\theta^0-2J^{-1}\hat{R}_z^0=-2J^{-1}\left[\hat{R}_z^0-\frac{1}{2}J\rho^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)R_\theta^0\right]=$$

$$=-J^{-1}\overset{*}{\square}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right], \tag{4.31}$$

الآن بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (3.31) ، ومن ثم بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (4.27) والمعادلة (4.20) ، نحصل مباشرةً على المعادلة (4.24) .

7 . لدينا:

$$\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0+J^{-1}\hat{R}_r^0-\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{\theta z}^0=J^{-1}\hat{R}_r^0+\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0-\frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0=$$

$$=\frac{1}{2}\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0+J^{-1}\hat{R}_r^0=J^{-1}(\hat{R}_r^0+\frac{1}{2}J\rho^{-1}\partial_z R_\theta^0)=$$

$$=-\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\square}_4\partial_z\left[l_\theta t+h_\theta+\rho^{-1}\left(t*R_\theta^0\right)\right], \tag{4.32}$$

الآن بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة (4.32) ومن ثم بالاستفادة من المعادلة (4.20) نحصل مباشرةً على المعادلة (4.25).

ب. سلوك تشيفر – إغناتشاك الدقيق المتمم للجسم المدروس ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة:

للحصول على معادلات تشيفر إغناتشاك الدقيقة المتممة للجسم المعتبر في $\Omega\times T_+$ ، نتبع الآتي :

- نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على مجموع المعادلتين $(3.4)_1,(3.4)_2$ ومن ثم نستفيد من معادلة الفصل (4.21)،
- نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على المعادلة $(3.4)_3$ ومن ثم نستفيد من معادلة الفصل (4.22)،
- نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة $(3.4)_4$، ومن ثم نستفيد من معادلة الفصل (4.23)،

- نطبق المؤثر $\overset{*}{\Box}{}_2^0$ على طرفي المعادلة $(3.4)_5$ ، ومن ثم نستفيد من معادلة الفصل التالية المحققة في $\Omega\times T^+$:

$$\overset{*}{\Box}{}_2^0\left\{\partial_r\hat{R}_z^0-\frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}^0_{(rz)}-\frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}^0_{[rz]}\right\}= =-\frac{1}{2}J^{-1}\overset{*}{\Box}{}_4^0\,\partial_r\left(r^1+\partial_r\right)X_\theta, \tag{4.33}$$

- نطبق المؤثر $\overset{*}{\Box}{}_2^0$ على طرفي المعادلة $(3.4)_6$ ، ومن ثم نستفيد من معادلة الفصل (4.23)،
- نأخذ المتوسط: $\frac{1}{2}\left[(3.4)_7+(3.4)_8\right]$ ، ومن ثم بالاستفادة من المعادلة التقليدية $(4.8)_1$.
- نأخذ نصف الفرق: $\frac{1}{2}\left[(3.4)_7-(3.4)_8\right]$ ، ومن ثم نطبق المؤثر $\overset{*}{\Box}_2$ ، ونستفيد من معادلة الفصل التالية المحققة في $\Omega\times T^+$:

$$\overset{*}{\Box}_2\left[\rho^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)R_\theta^0-2J^{-1}\hat{R}_z^0\right]=J^{-1}\overset{*}{\Box}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta, \tag{4.34}$$

- أخيراً نضيف المؤثر $\overset{*}{\Box}{}_2^0$ على طرفي المعادلة $(3.4)_9$ ، من ثم نستخدم معادلة الفصل (4.25)،

نحصل بالنتيجة على:

معادلات تشيفر – إغناتشاك الدقيقة المتممة والمحققة في $\Omega\times T^+$:

$$2\gamma J^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\Re'_r-\overset{*}{\Box}_2[\left(\ddot{\mu}'_{rr}+\ddot{\mu}'_{\theta\theta}\right)-2\beta\,\ddot{\kappa}']=0, \tag{4.35}$$

$$2\gamma J^{-1}\partial_z\Re'_z-\overset{*}{\Box}_2\left(\ddot{\mu}'_{zz}-\beta\,\ddot{\kappa}'\right)=0, \tag{4.36}$$

$$J^{-1}\partial_z\Re'_r-\overset{*}{\Box}{}_2^0\left\{\frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}'_{(rz)}-\frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}'_{[rz]}\right\}=0, \tag{4.37}$$

$$J^{-1}\partial_r\Re'_z-\overset{*}{\Box}{}_2^0\left\{\frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}'_{(rz)}-\frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}'_{[rz]}\right\}=0, \tag{4.38}$$

$$J^{-1}\Re'_r+\overset{*}{\Box}{}_2^0\left\{\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\theta z)}+\frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\theta z]}\right\}=0, \tag{4.39}$$

$$\hat{c}_2^2\left(r^{-1}-\partial_r\right)R'_\theta+\ddot{\sigma}'_{(r\theta)}=0, \tag{4.40}$$

$$-2J^{-1}\Re'_z+\rho^{-1}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\overset{*}{\square}{}_2^0 R'_\theta-\frac{1}{\alpha}\overset{*}{\square}{}_2\,\ddot{\sigma}'_{[r\theta]}=0, \tag{4.41}$$

$$J^{-1}\Re'_r+\overset{*}{\square}{}_2^0\left\{\rho^{-1}\partial_z R'_\theta-\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\theta z)}+\frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\theta z]}\right\}=0, \tag{4.42}$$

حيث:

$$\Re'_r=\overset{*}{\square}{}_2^0\hat{R}'_r+\hat{Y}_r,\ \Re'_z=\overset{*}{\square}{}_2\hat{R}'_z+\hat{Y}_z,$$

$$\ddot{\kappa}'=\frac{1}{2\gamma+3\beta}\left(\ddot{\mu}'_{rr}+\ddot{\mu}'_{\theta\theta}+\ddot{\mu}'_{zz}\right),\ R'_\theta=\partial_r\sigma'_{r\theta}+\partial_z\sigma'_{z\theta}+2r^{-1}\sigma'_{(r\theta)},$$

$$\hat{Y}_r=\overset{*}{\square}{}_2^0 Y_r+\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4^0\partial_z X_\theta,\quad \hat{Y}_z=\overset{*}{\square}{}_2 Y_z-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta,$$

من الشروط الحدية (3.5) نحصل على:

الشروط الحدية المتممة والمحققة على $\partial\Omega\times T$:

$$\begin{aligned}
&n_r\mu'_{rr}+n_z\mu'_{zr}=m_r-m_r^0,\\
&n_r\mu'_{rz}+n_z\mu'_{zz}=m_z-m_z^0,\\
&n_r\sigma'_{r\theta}+n_z\sigma'_{z\theta}=0,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

حيث أن:

$$m_r^0=n_r\mu_{rr}^0+n_z\mu_{zr}^0\quad,\ m_z^0=n_r\mu_{rz}^0+n_z\mu_{zz}^0,$$

التي فيها تنتج المقادير $\mu_{rr}^0,\mu_{zr}^0,\mu_{rz}^0,\mu_{zz}^0$, عن العلاقات (4.18) و (4.15)،

ومن الشروط الابتدائية (3.10) ،(3.6) نحصل على:

الشروط الابتدائية المتممة التالية لأجل الحقول المتممة $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}')$ والمحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{skew}\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)},\ \ \boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{0(0)}, \\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{skew}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)},\ \ \dot{\boldsymbol{\mu}}' = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^{0(0)}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

وهنا الرمز skew يدل على الجزء التناظري العكسي ، $\mathbf{skew}\,\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$ ،

وبالتالي تأخذ الشروط الابتدائية السابقة الشكل التالي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\mu'_{rr} = \mu_{rr}^{(0)} - \mu_{rr}^{0(0)}, \mu'_{\theta\theta} = \mu_{\theta\theta}^{(0)} - \mu_{\theta\theta}^{0(0)}, \mu'_{zz} = \mu_{zz}^{(0)} - \mu_{zz}^{0(0)}, \\ &\mu'_{rz} = \mu_{rz}^{(0)} - \mu_{rz}^{0(0)}, \mu'_{zr} = \mu_{zr}^{(0)} - \mu_{zr}^{0(0)}, \\ &\sigma'_{r\theta} = 2\alpha\omega_{r\theta}^{(0)}, \sigma'_{\theta r} = 2\alpha\omega_{\theta r}^{(0)}, \\ &\sigma'_{\theta z} = 2\alpha\omega_{\theta z}^{(0)}, \sigma'_{z\theta} = 2\alpha\omega_{z\theta}^{(0)}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

علماً أن :

$$\begin{aligned} &\omega_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\left(r^{-1} + \partial_r\right) h_\theta - 2h_z\right] = -\omega_{\theta r}^{(0)}, \\ &\omega_{\theta z}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_z h_\theta + 2h_r\right) = -\omega_{z\theta}^{(0)}, \end{aligned} \tag{4.46}$$

و:

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}'_{rr} = \dot{\mu}_{rr}^{(0)} - \dot{\mu}_{rr}^{0(0)}, \dot{\mu}'_{\theta\theta} = \dot{\mu}_{\theta\theta}^{(0)} - \dot{\mu}_{\theta\theta}^{0(0)}, \dot{\mu}'_{zz} = \dot{\mu}_{zz}^{(0)} - \dot{\mu}_{zz}^{0(0)}, \\ &\dot{\mu}'_{rz} = \dot{\mu}_{rz}^{(0)} - \dot{\mu}_{rz}^{0(0)}, \dot{\mu}'_{zr} = \dot{\mu}_{zr}^{(0)} - \dot{\mu}_{zr}^{0(0)}, \\ &\dot{\sigma}'_{r\theta} = 2\alpha\dot{\omega}_{r\theta}^{(0)}, \dot{\sigma}'_{\theta r} = 2\alpha\dot{\omega}_{\theta r}^{(0)}, \\ &\dot{\sigma}'_{\theta z} = 2\alpha\dot{\omega}_{\theta z}^{(0)}, \dot{\sigma}'_{z\theta} = 2\alpha\dot{\omega}_{z\theta}^{(0)}, \end{aligned} \tag{4.47}$$

علماً أن :

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\left(r^{-1} + \partial_r\right) l_\theta - 2l_z\right] = -\dot{\omega}_{\theta r}^{(0)}, \\ &\dot{\omega}_{\theta z}^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_z l_\theta + 2l_r\right) \end{aligned}$$

وتنتج: $\mu_{rr}^{0\,(0)}, \mu_{\theta\theta}^{0(0)}, \mu_{zz}^{0(0)}, \mu_{rz}^{0(0)}, \mu_{zr}^{0(0)}$ عن وضع $t\ =0$ في عبارات الانفعالات التقليدية $\mu_{rr}^{0}, \mu_{\theta\theta}^{0}, \mu_{zz}^{0}\ , \mu_{rz}^{0}\ , \mu_{zr}^{0}$ الناتجة عن دمج العلاقات (4.18) و(4.15)،حيث ينتج لدينا :

$$\mu_{rr}^{0(0)}=-\gamma\partial_{rz}^{2}h_{\theta}, \mu_{\theta\theta}^{0(0)}=-\gamma r^{-1}\partial_{z}h_{\theta}, \mu_{zz}^{0(0)}=\gamma\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\partial_{z}h_{\theta},$$

$$\mu_{rz}^{0(0)}=\frac{1}{2}\Big[(\gamma+\varepsilon)\partial_{r}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)-(\gamma-\varepsilon)\partial_{z}^{2}\Big]h_{\theta}, \tag{4.49}$$

$$\mu_{zr}^{0(0)}=\frac{1}{2}\Big[(\gamma-\varepsilon)\partial_{r}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)-(\gamma+\varepsilon)\partial_{z}^{2}\Big]h_{\theta},$$

وأخيراً ينتج: $\dot{\mu}_{rr}^{0(0)}, \dot{\mu}_{\theta\theta}^{0(0)}, \dot{\mu}_{zz}^{0(0)}, \dot{\mu}_{rz}^{0(0)}, \dot{\mu}_{zr}^{0(0)}$ عن وضع $t=0$ في عبارات المشتقات الزمنية الأولى للانفعالات التقليدية: $\dot{\mu}_{rr}^{0}, \dot{\mu}_{\theta\theta}^{0}, \dot{\mu}_{zz}^{0}\ , \dot{\mu}_{rz}^{0}\ , \dot{\mu}_{zr}^{0}$ والناتجة بدورها عن المشتقات الزمنية الأولى للعلاقات (4.18) مع المشتقات الزمنية الأولى للعلاقات (4.15)، حيث ينتج لدينا :

$$\dot{\mu}_{rr}^{0(0)}=-\gamma\partial_{rz}^{2}l_{\theta}, \dot{\mu}_{\theta\theta}^{0(0)}=-\gamma r^{-1}\partial_{z}l_{\theta}, \dot{\mu}_{zz}^{0(0)}=\gamma\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)\partial_{z}l_{\theta},$$

$$\dot{\mu}_{rz}^{0(0)}=\frac{1}{2}\Big[(\gamma+\varepsilon)\partial_{r}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)-(\gamma-\varepsilon)\partial_{z}^{2}\Big]l_{\theta}, \tag{4.50}$$

$$\dot{\mu}_{zr}^{0(0)}=\frac{1}{2}\Big[(\gamma-\varepsilon)\partial_{r}\left(r^{-1}+\partial_{r}\right)-(\gamma+\varepsilon)\partial_{z}^{2}\Big]l_{\theta},$$

والآن من العلاقات التأسيسية (3.11) نحصل على:

العلاقات التأسيسية العكسية المتممة التالية والمحققة في $\Omega\times T$:

$$2\gamma\,\kappa_{rr}'=\mu_{rr}'-\beta\,\kappa',\ 2\gamma\,\kappa_{\theta\theta}=\mu_{\theta\theta}'-\beta\,\kappa',\ \ 2\gamma\kappa_{zz}=\mu_{zz}'-\beta\,\kappa',$$

$$\left(\kappa_{rz}',\kappa_{zr}'\right)=\frac{1}{2\gamma}\mu_{(rz)}'\pm\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[rz]}',$$

$$\left(\gamma_{r\theta}',\gamma_{\theta r}'\right)=\frac{1}{2\mu}\sigma_{(r\theta)}'\pm\frac{1}{2\alpha}\sigma_{[r\theta]}', \tag{4.51}$$

$$\left(\gamma_{\theta z}',\gamma_{z\theta}'\right)=\frac{1}{2\mu}\sigma_{(\theta z)}'\pm\frac{1}{2\alpha}\sigma_{[\theta z]}',$$

حيث : $\kappa'=\dfrac{1}{2\gamma+3\beta}\left(\mu_{rr}'+\mu_{\theta\theta}'+\mu_{zz}'\right),$

الآن من العلاقات (3.12) و (4.17) نحصل على :

العلاقات التي تعطي الإزاحة والدورانات المتممة بدلالة الإجهادات المتممة والمحققة $\Omega \times T$:

$$u'_\theta = \rho^{-1}\left(t * R'_\theta\right),$$

$$\varphi'_r = \left(l_\theta + \frac{1}{2}\partial_z l_\theta\right) + \left(h_r + \frac{1}{2}\partial_z h_\theta\right) +$$

$$+J^{-1} * \left(\hat{R}'_r + Y_r\right) + t * \left(J^{-1}\hat{R}^0_r + \frac{1}{2}\partial_z \rho^{-1} R^0_\theta\right), \qquad (4.52)$$

$$\varphi'_z = \left[l_z - \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right) l_\theta\right] + \left[h_z - \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right) h_\theta\right] +$$

$$+J^{-1} t * \left(\hat{R}'_z + Y_z\right) + t * \left[J^{-1}\hat{R}^0_z - \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right)\rho^{-1} R^0_\theta\right],$$

آلية حل مسألة سلوك تشيفر –إغناتشاك ضمن حالة التناظر المحوري الثاني للانفعالات المرنة للجسم $(E - N : 5)$:

بحل مسألة الوصف الإجهادي التقليدي $(4.18)-(4.8)$ نحصل على سلوك إغناتشاك التقليدي: $\left(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0\right)$ وعندها لحل مسألة الوصف الإجهادي المتمم $(4.52)-(4.35)$ نحصل على سلوك إغناتشاك المتمم $\left(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}'\right)$. وأخيراً بالتعويض في العلاقات (4.1) نحصل على الحل $\left(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}\right)$ لمسألة الوصف الإجهادي الأصلية $(3.12)-(3.4)$.

5. الاستنتاجات والمقترحات :

<u>أولاً :</u> الاستنتاجات في البحث لأجل الجسم الصلب المرن الدقيق $(E - N : 5)$ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة ، تم نعمم طريقة مقطع تشيفر المتجهي إلى مقطع تشيفر التنسوري من المرتبة الثانية ليشمل مسألة إغناتشاك لأجل الجسم المرن الصلب دقيق الاستقطاب ضمن حالة التناظر المحوري الثانية له.

<u>ثانياً :</u> المقترحات (التوصيات) : بمكن أن نوصي بمناقشة المسائل الآتية:

مسألة1: إعادة الدراسة السابقة فيما لو كان الجسم يخضع لحقل كهرطيسي .

مسألة2: إعادة الدراسة السابقة للجسم ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة.

مسألة3: إعادة الدراسة السابقة لأجل الحالة الفراغية للانفعالات المرنة ضمن الترموديناميك المعمم الأول (بزمن استرخاء واحد) .

مسألة 4: إعادة الدراسة السابقة لأجل الحالة الفراغية للانفعالات المرنة ضمن الترموديناميك المعمم الثاني (بزمني استرخاء).

المراجع

[1]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[2]–Dyszlewicz , J ,**1996** - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[3]–Dyszlewicz , J ,**1997** - *Stress equations of motion of Ignaczak type for the second axisymmetric problem of micropolar elastody–namics*, Applicationes Mathematicae, 24,3 (1997), pp. 251–265.

[4]-Dyszlewicz , J , **1980**- *Selected boundary problems of equa-tions for the plane problems in micropolar theory of elasticity*, Stud. Geotech. et. mech., I-1980, 2 **,** 3 , 5-20 ; II-1980 ,2 , 4 , 21-36.

[5] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[6] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[7]– W. Nowocki , **(1970)**, Theory of Elasticity , PWN Warsaw.

[8]– Waad Samir Attiah, **2023**– Schafer vector method for the general trade-tional mathematical model of the second axially symmetric state of the elastic strain of the micropolar elastic solid, , Journal of Al-Baath University,Vol.45, Nr.5, p. 87-108**.**

.