نظرية العزوم الثلاث (معادلة كلابيرون)

Theorem of Three Moments

مهندس الرأي, الدكتور عبدالله مرعي

الملخص:

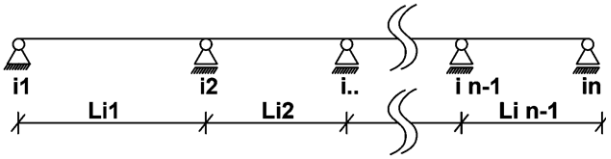
سنعرض في هذه المقالة شرحاً مبسطاً لاستخدام طريقة العزوم الثلاث في حساب القوى الداخلية (عزوم وردود افعال وقوى قاصة) الناتجة عن تحميل الجوائز المستمرة بمختلف حالات, وذلك لكثرة وجود مثل هذه الجوائز في مختلف المنشآت الهندسية ولبساطة استخدام هذه الطريقة في ايجاد القوى الداخلية باستخدام الآلة الحاسبة فقط.

الكلمات المفتاحية: نظرية العزوم الثلاث, معادلة كلابيرون, الجوائز المستمرة, طريقة القوى.

1. مقدمة

تعتبر طريقة العزوم الثلاث (معادلة كلابيرون Clapeyron) حالة خاصة من طريقة العمل الوهمي (طريقة القوى) المستخدمة في حساب وتحليل المنشآت غير المقررة, وتستخدم بشكل خاص لحساب وتحليل الجوائز المستمرة ورسم مخططات العزوم والقوى القاصة لها.

ويُعرف الجائز المستمر بأنه جائز يستند على أكثر من مسندين بشرط أن لا يقطع مادته أي مفصل.



الشكل (1): جائز مستمر

لإيجاد قيم عزوم المساند في هذه الجوائز نتبع الخطوات التالية :

1- إيجاد درجة عدم التقرير للجائز.

2- تقرير الجائز ضمن شروط.

3- إيجاد معادلات تضبط سلوكية الجائز المقرر مع الجائز الفعلي.

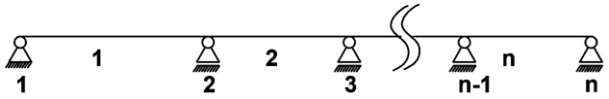
4- حل معادلات ضبط سلوكية الجائز المقرر للحصول على المجاهيل التي تعبر عن القوى الداخلية في الجائز المستمر.

2. طريقة العزوم الثلاثة:

1.2 حساب درجة عدم التقرير للجائز:

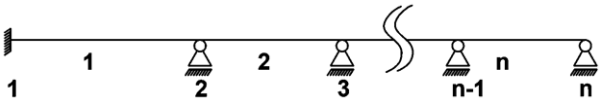
تختلف درجة عدم التقرير للجائز المستمر وفقاً لعدد فتحاته (n) ولشروط استناده وذلك كما يلي:

– استناد بسيط من الطرفين: درجة عدم التقرير تساوي (n−1) الشكل (2).



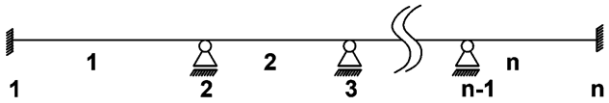
الشكل (2): استناد بسيط من الطرفين

– استناد بسيط من طرف ووثاقة من الطرف الآخر: درجة عدم التقرير تساوي (n) الشكل (3).



الشكل (3): استناد بسيط من طرف ووثاقة من الطرف الآخر

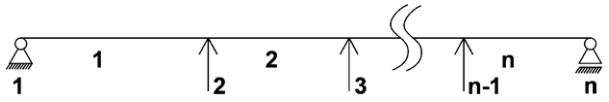
– وثاقة من الطرفين: درجة عدم التقرير تساوي (n+1) الشكل (4).



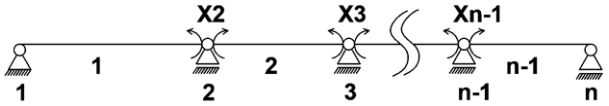
الشكل (4): وثاقة من الطرفين

2.2 تقرير الجائز:

يمكن تقرير الجائز إما بحذف المساند والتعويض عنها بردود أفعالها (فتكون المجاهيل هي ردود الأفعال في المساند) كما في الشكل (5–a), أو بإدخال مفاصل عند المساند (وتكون المجاهيل هي قيم العزوم المحررة في المساند نتيجة ادخال المفاصل) الشكل (5–b).



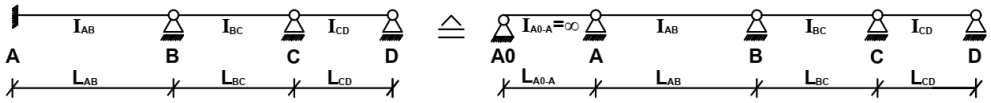
الشكل (5–a): تقرير الجائز بحذف المساند



الشكل (5–b): تقرير الجائز بوضع مفاصل في نقاط الاستناد

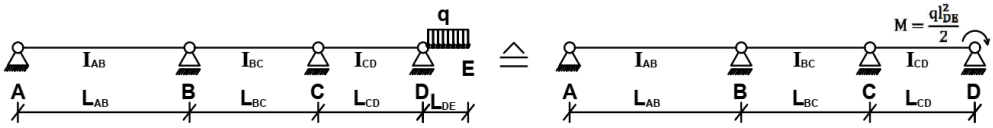
أثناء تقرير الجائز يجب أخذ الملاحظات التالية بعين الاعتبار:

ملاحظة 1: إذا كان أحد المساند الطرفية في الجائز عبارة عن وثاقة و ليكن المسند A فهذا يعني أن الجائز مستمر عند المسند A بحكم الوثاقة وذلك لوجود عزم فيه, وهنا تُمثَّل الوثاقة بفتحة واقعة على يسار المسند طولها $L_0 = 0$ وعزم عطالة مقطعها لا متناهي أي $I = \infty$ كما في الشكل (6–a).



الشكل (6–a)

ملاحظة 2: وإذا كانت نهاية الجائز عبارة عن ظفر فيُحذف الظفر ويحمل الجائز عند مسنده الأخير بعزم يساوي العزم الناتج عن تحميل الظفر مع مراعاة اشارة العزم الشكل (6–b)

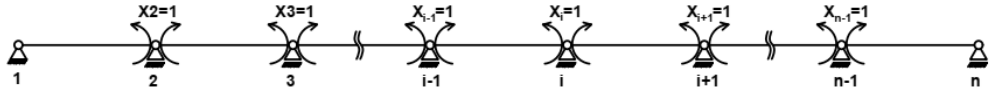


الشكل (6–b)

ملاحظة 3: يعتبر العزم موجب إذا أحدث اجهادات شد في الألياف السفلية للجائز وسالب بالعكس وتؤخذ هذه الاشارة بعين الاعتبار عند حساب مساحة مخطط العزم وقيم A و B التي سترد لاحقاً.

2.2 المعادلات الأساسية لنظرية العزوم الثلاث:

ليكن لدينا جائزاً مستمراً مستنداً استناداً بسيطاً من طرفيه وعدد فتحاته n فإن درجة عدم التقرير له تساوي (n–1). بتقرير الجائز بإدخال مفاصل عند نقاط الاستناد كما في الشكل (7), يكون لدينا (n–1) مجهول (المجاهيل هنا هي عزوم الجائز عند نقاط الاستناد) ونحتاج لإيجاد هذه المجاهيل إلى (n–1) معادلة.



الشكل (7): تقرير الجائز بوضع مفاصل في نقاط الاستناد

إن الانتقالات في مساند الجائز الفعلي معدومة, ولضبط سلوكية الجائز المقرر مع الجائز الفعلي يجب أن تكون الانتقالات في مساند الجائز المقرر أيضاً معدومة, وبالتالي يمكننا كتابة معادلات الحل بالشكل $\theta_i = 0$, حيث θ_i تعبر عن قيمة الدوران النسبي الكلي عند المسند i في الجائز المقرر تحت تأثير كافة الأحمال الداخلية والخارجية.

فإذا كان الجائز يستند على n مسند ولضبط سلوكية المسند i منه بحيث تكون نفسها قبل وبعد التقرير يجب أن تكون معادلة الدوران النسبي وفقاً لطريقة العمل الوهمي من الشكل $\theta_i = 0$ وبالتالي يكون:

$$\boldsymbol{\delta_{i1} * X1 + \delta_{i2} * X2 + \cdots + \delta_{i(i-1)} * X_{(i-1)} + \delta_{ii} * Xi + \delta_{i(i+1)} * X_{(i+1)} + \cdots + \delta_{in} Xn + \theta_{ip} = 0} \quad (1)$$

وتعني هذه المعادلة بأن الدوران النسبي الكلي فوق المسند i الناتج عن تأثير جميع المجاهيل من X_1 حتى X_n (والتي هي قيم العزوم عند مساند الجائز) إضافة إلى الحمل الخارجي مساوٍ للصفر حيث:

- $\boldsymbol{\delta_{i(i-1)}}$: الدوران فوق المسند i تحت تأثير العزم الواحدي $X_{(i-1)} = 1$ المطبق في المسند $(i-1)$.

- $\boldsymbol{\delta_{i(i-1)} X_{(i-1)}}$: تمثل الدوران الحقيقي فوق المسند i الناتج عن تأثير العزم الحقيقي $X_{(i-1)}$ المطبق في المسند $(i-1)$.

- $\boldsymbol{\theta_{ip}}$: الدوران النسبي فوق المسند i الناتج عن تأثير الحمولات الخارجية على الفتحة Li.

ووفق طريقة القوى تُحسب الأمثال $\boldsymbol{\delta}$ (الناتجة عن القوى الداخلية) من العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\delta_{i(i-1)} = \int_s \overline{M}_i . \frac{\overline{M}_{(i-1)}}{E.I_{i-1}} . d_x} \quad (2)$$

و الأمثال $\boldsymbol{\theta_{ip}}$ (الناتجة عن القوى الخارجية) من العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\theta_{ip} = \int_s \overline{M}_i . \frac{M_p}{E.I} . d_x} \quad (3)$$

حيث : $\overline{M}_i$: مخطط العزم الواحدي الناتج عن تطبيق عزم $X_i = 1$ في المسند i.

$\overline{M}_{(i-1)}$: مخطط العزم الواحدي الناتج عن تطبيق عزم واحدي $X_{i-1} = 1$ في المسند $(i-1)$.

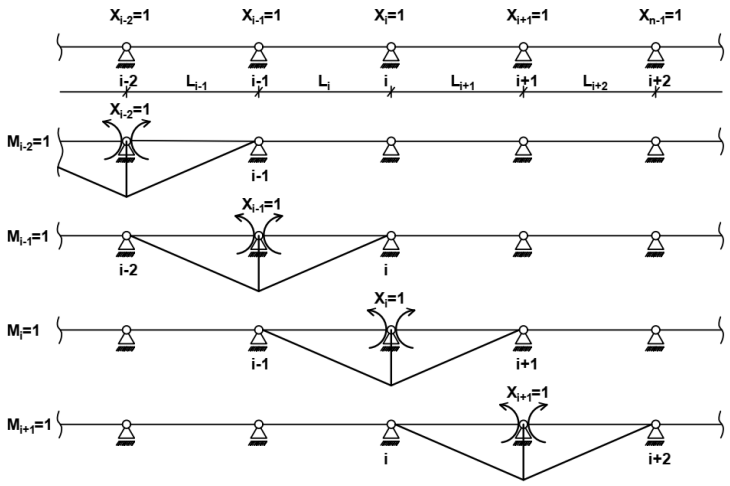
M_p : مخطط العزم الناتج عن الحمولات الخارجية باعتبار الفتحة Li تستند استناداً بسيطاً.

لحساب الأمثال $\boldsymbol{\delta_{in}}$ يتم رسم مخططات العزوم الواحدية في الجملة المقررة للفتحتين L_{i+1} و L_i وذلك باعتبار كل فتحة تعمل كجائز بسيط كما هو مبين في الشكل (8), وبتطبيق المعادلة (2) يكون:

$$\delta_{i(i-1)} = \int_s \overline{M}_i . \frac{\overline{M}_{(i-1)}}{E.I_{i-1}} . d_x = \frac{1}{6} * 1 * 1 * \frac{l_i}{EI_i} = \frac{1}{6} * \frac{l_i}{EI_i}$$

$$\delta_{ii} = \int_s \overline{M}_i . \frac{\overline{M}_i}{E.I_i} . d_x = \frac{1}{3} * 1 * 1 * \frac{l_i}{EI_i} + \frac{1}{3} * 1 * 1 * \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} = \frac{1}{3} * \left(\frac{l_i}{EI_i} + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}\right)$$

$$\delta_{i(i+1)} = \int_s \overline{M}_i . \frac{\overline{M}_{(i+1)}}{E.I_{i+1}} . d_x = \frac{1}{6} * 1 * 1 * \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} = \frac{1}{6} * \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}$$



الشكل (8): مخططات العزوم الواحدية للمساند من i−2 حتى i+1 في الجملة المقررة

وبالتعويض في المعادلة الأساسية (1) نحصل على:

$$\Rightarrow \frac{1}{6} * \frac{l_i}{EI_i} * X_{i-1} + \frac{1}{3} * \left(\frac{l_i}{EI_i} + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}\right) * X_i + \frac{1}{6} * \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} * X_{i+1} + \theta_{ip} = 0$$

$$\boldsymbol{(4)\ \frac{l_i}{EI_i} * X_{i-1} + 2 * \left(\frac{l_i}{EI_i} + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}\right) * X_i + \frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}} * X_{i+1} = -6 * \theta_{ip}}$$

وهي معادلة العزوم الثلاث للفتحتين L_{i+1} و L_i.

ولحساب الأمثال θ_{ip} في المعادلة السابقة يتم رسم مخطط العزم M_p للحمولات الخارجية لكل فتحة من فتحات الجائز على حدة باعتبارها جائزاً بسيطاً كما في الشكل (9), وباعتبار أن:

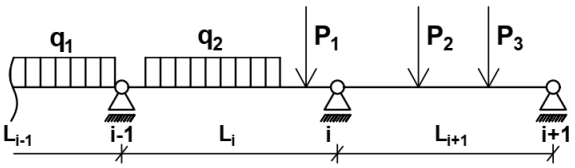
A_i , A_{i+1} مساحة مخطط العزم M_p للحمولات الخارجية المؤثرة في الجائز $Li+1$ و Li .

C_i , C_{i+1} مركز ثقل المساحة A_{i+1} و A_i.

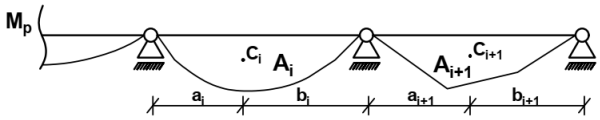
a_i بعد مركز ثقل مخطط المساحة A_i عن المسند $i-1$.

b_{i+1} بعد مركز ثقل مخطط المساحة A_{i+1} عن المسند $i+1$.

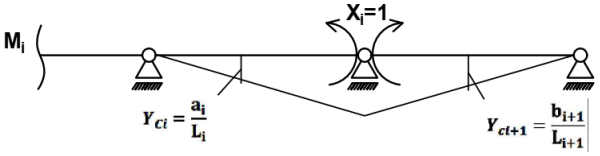
y_i , y_{i+1} الترتيب من مخطط عزم القوى الواحدية $\overline{M}_i$ المقابل لمركز ثقل المساحة A_{i+1} , A_i.



الشكل (9–a): الحمولة الخارجية المؤثر على الجائز



الشكل (9–b): مخطط Mp باعتبار الحمولة الخارجية تؤثر على جائز بسيط



الشكل (9–c): مخطط العزم للعزم الواحدي

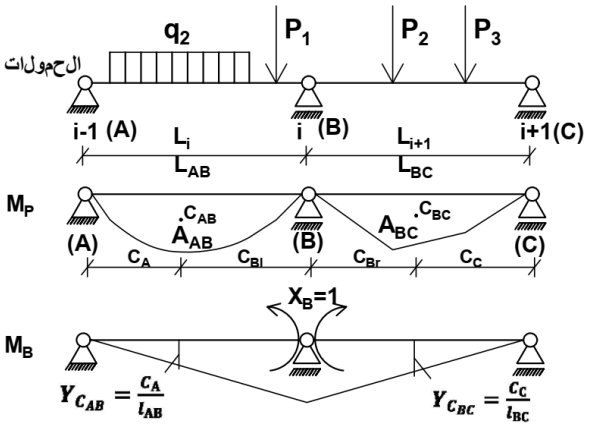
وباستخدام العلاقة (3) يكون:

$$\theta_{ip}=\int_S \overline{M}_i.\frac{M_p}{E.I}.d_s=A_c*Y_c*\frac{1}{EI}=A_i*\frac{a_i}{l_i}*\frac{1}{EI_i}+A_{i+1}*\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}*\frac{1}{EI_{i+1}}$$

وبالتعويض في العلاقة (4) يكون:

$$\frac{l_i}{EI_i}*X_{i-1}+2*\left(\frac{l_i}{EI_i}+\frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}\right)*X_i+\frac{l_{i+1}}{EI_{i+1}}*X_{i+1}=-6*[A_i*\frac{a_i}{l_i}*\frac{1}{EI_i}+A_{i+1}*\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}*\frac{1}{EI_{i+1}}] \quad (5)$$

ولتبسيط الأمور يتم تسمية المسند (i–1) بـ A والمسند (i) بـ B والمسند (i+1) بـ C كما في الشكل (10) حيث:



الشكل (10)

- $M_A=X_{i-1}$ ، $M_B=X_i$ ، $M_C=X_{i+1}$ ، $l_{AB}=l_i$ ، $l_{BC}=l_{i+1}$
- A_{AB} – مساحة مخطط العزم للفتحة AB – C_A بعد مركز ثقل مخطط A_{AB} عن المسند A.
- A_{BC} – مساحة مخطط العزم للفتحة BC – C_C بعد مركز ثقل مخطط A_{BC} عن المسند C.

وبتبديل الرموز في العلاقة (5) وباعتبار قيمة E ثابتة على طول الجائز نحصل على:

$$M_A.\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + 2.M_B\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right) + M_C.\frac{l_{BC}}{I_{BC}} = -6\left(\frac{A_{AB}}{I_{AB}}.\frac{C_A}{l_{AB}} + \frac{A_{BC}}{I_{BC}}.\frac{C_C}{l_{BC}}\right) \qquad (6)$$

وهي معادلة العزوم الثلاث للفتحتين L_{BC} و L_{AB} باستخدام مساحة مخططات العزوم وبُعد مراكز ثقلها عن المساند.

حيث A_{AB} وA_{BC} تحسب يدوياً أو تؤخذ من **الجدول (1)** الذي يعرض مساحات بعض أشكال مخططات العزوم وبعد مراكز ثقلها عن المساند.

و بفرض أن: $A = A_{AB}.\frac{C_A}{l_{AB}}$, $B = A_{BC}.\frac{C_C}{l_{BC}}$

تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$M_A.\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + 2.M_B\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}} + \frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right) + M_C.\frac{l_{BC}}{I_{BC}} = -6 * \left(\frac{A}{I_{AB}} + \frac{B}{I_{BC}}\right) \qquad (7)$$

وهي **الصيغة العامة لمعادلة العزوم الثلاث** (أو ما يسمى **معادلة كلابيرون**).

وتعطى القيم A و B في **الجدول (2)** وفقاً لشكل الحمولة الخارجية.

إلا أنه يمكن حساب قيم A و B بشكل مباشر ودون الرجوع إلى الجداول وذلك كما يلي:

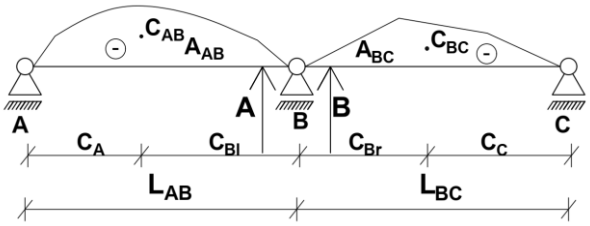
يتم رسم مخطط العزم للجائز المقرر (باعتبار كل فتحة منه تعمل كجائز بسيط بعد التقرير), ثم يُرسم الجائز مرة ثانية ويُحمل بمقلوب مخطط العزم الذي تم الحصول عليه آنفاً (أي نعتبر مخطط العزم كحمولة خارجية) كما في الشكل (11), و باعتبار:

- A_{AB} مساحة مقلوب مخطط العزم للفتحةِ AB – C_A بعد مركز ثقل مخطط A_{AB} عن المسند A.
- A_{BC} مساحة مقلوب مخطط العزم للفتحة BC – C_C بعد مركز ثقل مخطط A_{BC} عن المسند C.

حيث A_{AB} وA_{BC} تحسب يدوياً أو تؤخذ من الجدول (1) لبعض أشكال.

A رد الفعل الناتج في المسند B عن حمولة الفتحة AB بمقلوب مخطط العزم باعتبارها جائز مقرر.

B رد الفعل الناتج في المسند B عن حمولة الفتحة BC بمقلوب مخطط العزم باعتبارها جائز مقرر.



الشكل (11) مقلوب مخطط العزم

وبأخذ مجموع العزوم في الفتحة l_{AB} حول المسند(A) مساوٍ للصفر يكون:

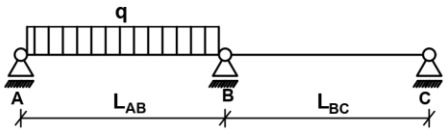
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \quad A.l_{AB} + (-A_{AB}).C_A = 0 \Rightarrow \quad A = A_{AB}.\frac{C_A}{l_{AB}}$$

وبالمثل فإن مجموع العزوم حول المسند (C) في الفتحة l_{BC} مساوٍ للصفر فيكون:

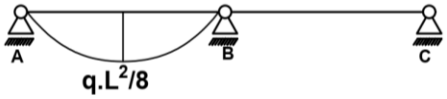
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \quad B.l_{BC} + (-A_{BC}).C_C = 0 \Rightarrow \quad B = A_{BC}.\frac{C_C}{l_{BC}}$$

وهي نفس القيم التي وردت سابقاً.

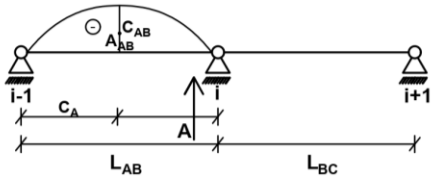
وللتحقق من بعض قيم الجدول (2) نعتبر مثلاً أن الفتحة AB محملة بحمولة موزعة بانتظام كما في الشكل (12) ونحسب قيمة رد الفعل A فيكون :



الشكل (12–a): الحمولات الخارجية



الشكل (12–b): مخطط العزم M_P



الشكل (12–c): الجائز محمل بمقلوب مخطط العزم

مساحة مخطط العزم: $A_{AB} = \frac{2}{3}.\frac{q.l_{AB}^2}{8}.l_{AB} = \frac{q.l_{AB}^3}{12}$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{q.l_{AB}^3}{24} \sum M_A = 0 \Rightarrow \quad A.l_{AB} + \frac{-q.l_{AB}^3}{12}.\left(C_A = \frac{l_{AB}}{2}\right) = 0$$

وهي القيمة نفسها الموجودة في الجدول (1).

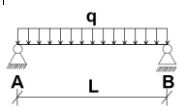
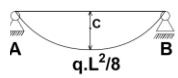
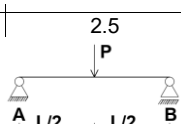
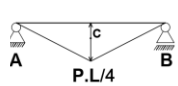
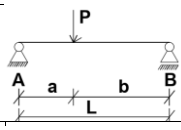
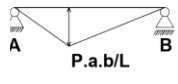
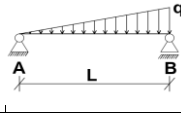
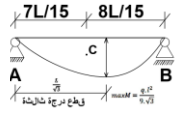
أثناء الحل يتم تطبق معادلة العزوم الثلاث على فتحات الجائز بالتتالي, فمثلاً إذا كان الجائز مكوناً من أربع فتحات ويستنداً على المساند A, B, C, D, E, F فيتم الحل بتطبيق المعادلة على فتحاته وفق الترتيب التالي: نطبق المعادلة أولاً على الفتحتين A, B, C وتكون المجاهيل M_B, M_C حيث $M_A=0$ فنحصل على المعادلة الأولى للحل ثم نطبق المعادلة على الفتحتين B, C, D وتكون المجاهيل هنا M_B, M_C, M_D ونحصل على المعادلة الثانية ثم نطبق المعادلة على الفتحتين C, D, E وتكون المجاهيل هنا M_C, M_D, M_E ونحصل على المعادلة الثالثة ثم نطبق المعادلة على الفتحتين D, E, F وتكون المجاهيل هنا M_D, M_F وتكون $M_F=0$ ونحصل على المعادلة الرابعة للحل وبهذا نكون قد حصلنا على أربع معادلات بأربعة مجاهيل (هي العزوم في المساند الوسطية للجائز) وبحلها نحصل على عزوم المساند في الجائز.

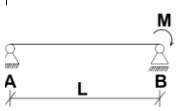
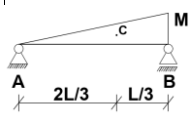
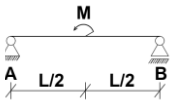
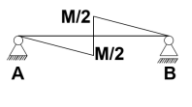
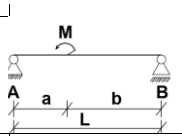
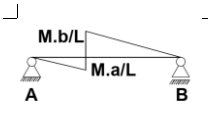
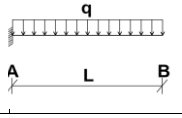
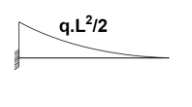
ملاحظة: يمكن تطبيق معادلة العزوم الثلاث لحساب تأثير التغيرات الحرارية و هبوط المساند في الجوائز المستمرة غير المقررة وسنترك هذا لمقال لاحق.

****

الجدول (1) مساحات بعض أشكال مخططات العزوم وبعد مراكز ثقلها عن المساند.

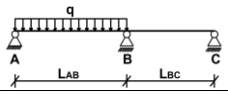
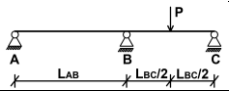
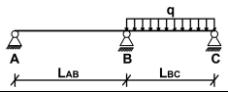
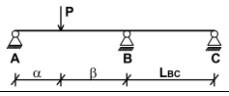
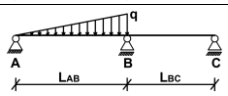
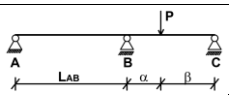
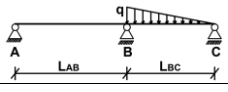
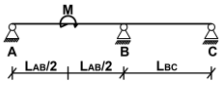
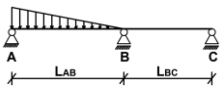
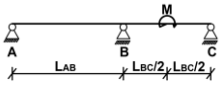
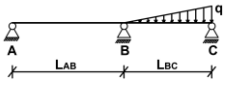
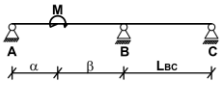
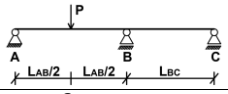
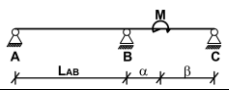
$$M_A.\frac{l_{AB}}{I_{AB}}+2.M_B\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}}+\frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right)+M_C.\frac{l_{BC}}{I_{BC}}=-6\left(\frac{A_{AB}}{I_{AB}}.\frac{C_A}{l_{AB}}+\frac{A_{BC}}{I_{BC}}.\frac{C_C}{l_{BC}}\right)$$

تسلسل	الجائز	مخطط العزم	مساحة مخطط العزم
1			$\frac{qL^3}{12}$
2			$\frac{PL^2}{8}$
3			$\frac{P.a.b}{2}$
4			$\frac{qL^3}{24}$

تسلسل	الجائز	مخطط العزم	مساحة مخطط العزم
5			$\frac{M.L}{2}$
6			0
7			$\frac{M}{L}.(a-b)$
8			$\frac{PL^2}{6}$

الجدول (2): قيم A و B المستخدمة في معادلة العزوم الثلاثة لبعض حالات التحميل الممكنة:

$$)M_A.\frac{l_{AB}}{I_{AB}}+2.M_B\left(\frac{l_{AB}}{I_{AB}}+\frac{l_{BC}}{I_{BC}}\right)+M_C.\frac{l_{BC}}{I_{BC}}==-6*(\frac{\mathrm{A}}{I_{AB}}+\frac{\mathrm{B}}{I_{BC}}$$

N	حالة التحميل	A	B	N	حالة التحميل	A	B
1		$\frac{ql_{AB}^3}{24}$	0	8		0	$\frac{pl_{BC}^2}{16}$
2		0	$\frac{ql_{BC}^3}{24}$	9		$(l_{AB}^2-\alpha^2)$	0
3		$\frac{7ql_{AB}^3}{360}$	0	10		0	10)*
4		0	$\frac{7ql_{BC}^3}{360}$	11		$\frac{M.l_{AB}}{24}$	0
5		$\frac{ql_{AB}^3}{45}$	0	12		0	$\frac{M.l_{BC}}{24}$
6		0	$\frac{ql_{BC}^3}{45}$	13		13)*	0
7		$\frac{pl_{AB}^2}{16}$	0	14		0	14)*

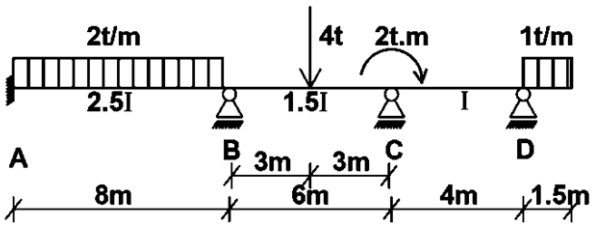
10)*: $\frac{p.\beta}{6.l_{BC}}.(l_{BC}^2-\beta^2)$

13)*: $\frac{M}{l_{AB}^2}.[2.\alpha^3-\beta^2.(3.\alpha+\beta)]$

14)*: $\frac{M}{l_{BC}^2}.[\alpha^2.(3.\alpha+\beta)-2.\beta^3]$

3. أمثلة عامة:

مثال 3−1: ليكن الجائز المبين في الشكل التالي:



و المطلوب رسم مخطط العزم M تحت تأثير الأحمال الخارجية.

سنحل المثال بطريقتين الأولى باتباع طريقة استخدام مخططات العزوم والثانية باستخدام ثوابت الجداول.

3−1−1: الحل: بتطبيق معادلة العزوم الثلاث باستخدام مساحة مخططات العزوم وبعد مراكز ثقلها عن المساند

الصيغة العامة لمعادلة العزوم الثلاث في هذه الحالة هي (انظر العلاقة 6):

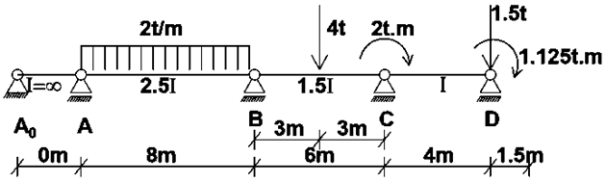
$$\mathbf{M_A}.\frac{\boldsymbol{l_{AB}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{AB}}}+2.\mathbf{M_B}\left(\frac{\boldsymbol{l_{AB}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{AB}}}+\frac{\boldsymbol{l_{BC}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{BC}}}\right)+\mathbf{M_C}.\frac{\boldsymbol{l_{BC}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{BC}}}=-6\left(\frac{\boldsymbol{A_{AB}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{AB}}}.\frac{\boldsymbol{C_A}}{\boldsymbol{l_{AB}}}+\frac{\boldsymbol{A_{BC}}}{\mathbf{E}.\mathbf{I_{BC}}}.\frac{\boldsymbol{C_C}}{\boldsymbol{l_{BC}}}\right)$$

نقرر الجائز بوضع مفاصل فوق المساند ونحول الوثاقة إلى مجاز A_0−A طوله $L_{A0-A}=0$ وعطالته لا نهائية $I_{A0-A}=\infty$ ثم نحذف الظفر ونعوض عن حمولاته الخارجية والعزم الناتج عنها بقيمها المؤثرة على المسند D فيصبح لدينا الشكل التالي:

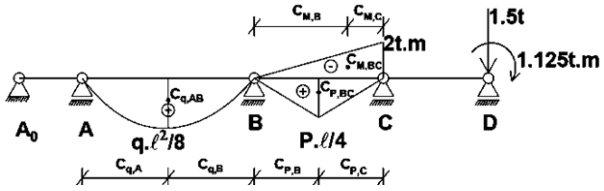
قيمة العزم الحاصل في الظفر نتيجة الحمولات الخارجية:

$$M_D=\frac{ql^2}{2}=\frac{-1*1.5^2}{2}=-1.125\ t.m$$

أن إشارة M_D سالبة لأن العزم يولد شد في الألياف العلوية للجائز.



ويكون شكل مخطط العزم للجائز المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية كما هو مبين جانباً.



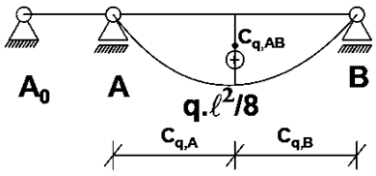
− رسم مخطط M تحت تأثير الأحمال الخارجية :

- **الفتحتين A_0AB:**

لدينا: $l_{AB} = 8m$, $I_{AB} = 2.5\,I$

$l_{A_0A} = 0$, $I_{A0A} = \infty$

شكل مخطط العزم:



$$C_{q,B} = \frac{l_{AB}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad A_{q,AB=} \frac{2}{3}.\frac{q.l_{AB}^2}{8}.l_{AB} = \frac{2}{3}.\frac{2.8^2}{8}.8 = 85.333 \quad ,$$

وبتطبيق المعادلة نجد:

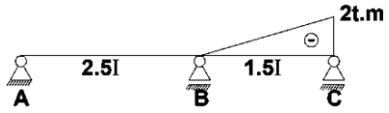
$$0 + 2\left(0 + \frac{8}{2.5.EI}\right)M_A + \frac{8}{2.5\,EI}.M_B = -6.\left(0 + \frac{85.333}{2.5EI}.\frac{4}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{6.4\,M_A + 3.2M_B = -102.4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{(1)}$$

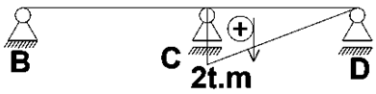
- **الفتحتين ABC:**

عند تحميل الفتحة BC بالعزم 2t.m المؤثر على المسند C لدينا خيارين في التحميل:

- إما أن نعتبر العزم مؤثر على الفتحة BC فيكون تأثيره كما هو مبين جانباً: (الإشارة سالبة كون الشد يحدث في الألياف العلوية)

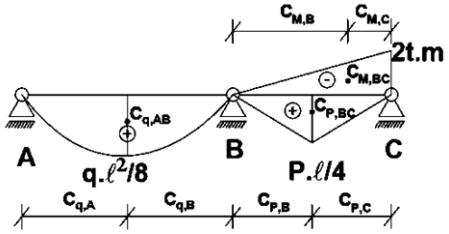


- أو نعتبر العزم مؤثراً على الفتحة CD وهنا يكون تأثيره كما في الشكل جانباً: (الإشارة موجبة كون الشد يحدث في الألياف السفلية)



وفي مثالنا هذا سنعتبر العزم مؤثر على الفتحة BC فيكون شكل تحميل الجائز ABC كما هو مبين:

ويكون لدينا:



$$C_{q,A} = 4 \quad A_{q,AB=} = 85.333 \quad ,$$

$$A_{P,BC=}\frac{1}{2}.\frac{P.l_{BC}}{4}.l_{BC} = \frac{1}{2}.\frac{4*.6}{4}.6 = 18$$

$$C_{P,C} = \frac{l_{BC}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A_{M,BC} = \frac{1}{2}.M.l_{BC} = \frac{1}{2} * (-2) * 6 = -6$$

$$C_{M,C} = \frac{1}{3}.l_{BC} = \frac{1}{3}.6 = 2$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

$$\frac{8}{2.5\,EI}.M_A + 2\left(\frac{8}{2.5\,EI} + \frac{6}{1.5.EI}\right)M_B + \frac{6}{1.5\,EI}.M_c = -6.\left(\frac{85.333}{2.5EI} * \frac{4}{8} + \frac{18}{1.5EI} * \frac{3}{6} + \frac{-6}{1.5EI} * \frac{2}{6}\right)$$

$$3.2.M_A + 14.4M_B + 4.M_c = -130.4 \dots\dots\dots\dots (2) \Rightarrow$$

– **<u>الفتحتين BCD</u>**: الحمولات المؤثرة هي:

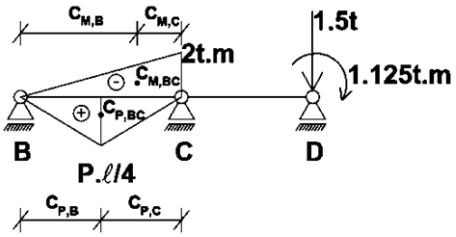
عند تحميل الفتحة CD بالعزم 1.125t.m المؤثر على المسند D (العزم المنقول من حمولة الظفر)

لدينا خيارين في التحميل:

– إما أن نعتبر العزم مؤثر على المسند D وبالتالي ندخل قيمة M_D=1.125t.m في المعادلة ونهمل تأثيره على الفتحة CD. أو نعتبر العزم مؤثر على الفتحة CD مباشرة وبالتالي يجب ادخال M_D=0 في المعادلة.

سنتابع حل المسألة وفق الخيار الأول

(M_D=1.125t.m) فيكون شكل التحميل كالتالي:



من الشكل نجد:

$$A_{P,BC}=\frac{1}{2}.\frac{P.l_{BC}}{4}.l_{BC}=\frac{1}{2}.\frac{4*.6}{4}.6=18$$

$$C_{P,B}=\frac{l_{BC}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$C_{M,B}=\frac{2}{3}.l_{BC}=\frac{2}{3}.6=4 \quad A_{M,BC}=\frac{1}{2}.M.l_{BC}=\frac{1}{2}*(-2)*6=-6 \quad ,$$

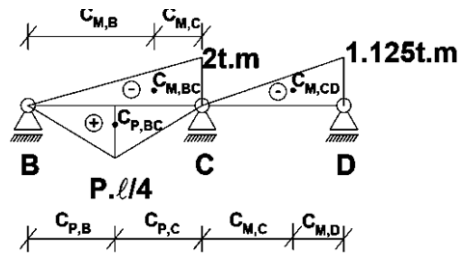
نعوض في المعادلة الأساسية:

$$\Rightarrow \frac{6}{1.5\,EI}.M_B+2\left(\frac{6}{1.5\,EI}+\frac{4}{1EI}\right)M_C+\frac{4}{1\,EI}.(M_D=-1.125)=-6.\left(\frac{18}{1.5EI}*\frac{3}{6}+\frac{-6}{1.5EI}*\frac{4}{6}\right)$$

$$4.M_B+16\,M_c=-15.5 \dots\dots\dots (3)$$

لنحل وفق الخيار الثاني فيكون شكل التحميل

كالتالي, من الشكل نجد:



$$A_{P,BC}=\frac{1}{2}.\frac{P.l_{BC}}{4}.l_{BC}=\frac{1}{2}.\frac{4*.6}{4}.6=18$$

$$C_{P,B}=\frac{l_{BC}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$A_{M,BC}=\frac{1}{2}.M.l_{BC}=\frac{1}{2}*(-2)*6=-6$$

$$C_{M,D}=\frac{2}{3}.l_{BC}=\frac{2}{3}.6=4$$

$$C_{M,B}=\frac{l_{CD}}{3}=\frac{4}{3}=1.333 \quad A_{M,CD}=\frac{-1.125*.4}{2}=-2.25 \quad ,$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

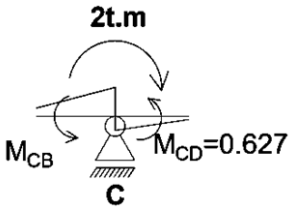
$$\Rightarrow \frac{6}{1.5\,EI}.M_B+2\left(\frac{6}{1.5\,EI}+\frac{4}{1EI}\right)M_C+\frac{4}{1\,EI}.(M_D=0)=-6.\left(\frac{18}{1.5EI}*\frac{3}{6}+\frac{-6}{1.5EI}*\frac{4}{6}+\frac{-2.25}{1EI}*\frac{1.333}{4}\right)$$

$$4.M_B+16\,M_c=-15.5 \dots\dots\dots (3)$$

بحل المعادلات الثلاث (1) و (2) و (3) نجد :

$$M_A=-12.808\,t.m, \qquad M_B=-6.383\,t.m\,, \qquad M_c=+0.627\,t.m$$

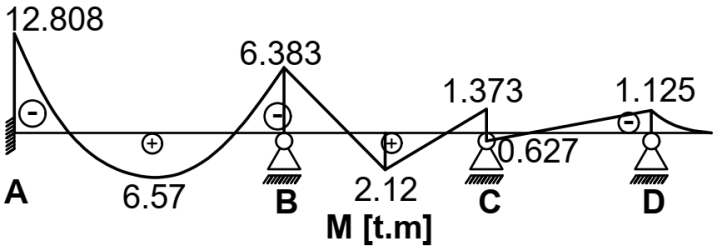
حتى تكون العقدة C متوازنة يجب أن يكون مجموع قيم العزوم عندها مساوٍ للصفر وبالتالي يكون:



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + (M_{CD} = 0627) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{CB} = +1.373t.m$$

و يكون مخطط العزم النهائي للجائز تحت تأثير الحمولات الخارجية بالشكل التالي:



3-1-2: الحل: بتطبيق معادلة العزوم الثلاث باستخدام الجداول:

الصيغة العامة لمعادلة العزوم الثلاث في هذه الحالة هي (انظر العلاقة 7):

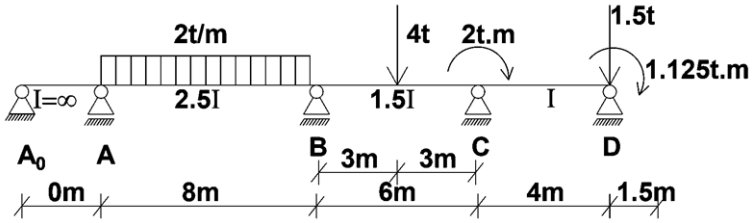
$$\frac{l_{A_0A}}{E.I_{A_0A}}.M_{A0} + 2.\left(\frac{l_{A_0A}}{E.I_{A_0A}} + \frac{l_{AB}}{E.I_{AB}}\right).M_A + \frac{l_{AB}}{E.I_{AB}}.M_B = -6.\left(\frac{A}{E.I_{A_0A}} + \frac{B}{E.I_{AB}}\right)$$

نقرر الجائز بوضع مفاصل فوق المساند ونحول الوثاقة إلى مجاز A_0-A طوله $L_{A0-A}=0$ وعطالته لا نهائية $I_{A0-A}=\infty$ ثم نحذف الظفر ونعوض عن حمولاته الخارجية والعزم الناتج عنها بقيمها المؤثرة على المسند D فيصبح لدينا الشكل التالي:

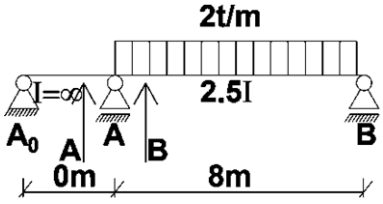
قيمة العزم الحاصل في الظفر نتيجة الحمولات الخارجية:

$$M_D = \frac{ql^2}{2} = \frac{-1*1.5^2}{2} = -1.125\ t.m$$

أن إشارة M_D سالبة لأن العزم يولد شد في الألياف العلوية للجائز.



- رسم مخطط M تحت تأثير الأحمال الخارجية :



- **الفتحتين A_0AB:**

لدينا: $I_{AB} = 2.5\,I$ ، $l_{AB} = 8m$

$I_{A0A} = \infty$ ، $l_{A_0A} = 0$

الحمولات المؤثرة هي كما في الشكل جانباً.

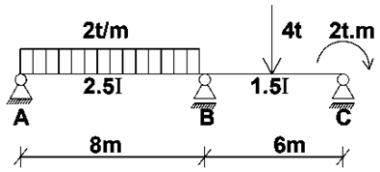
من الجدول (2) نجد: $A = 0$ ، $B = -q_{AB}\frac{l^3{}_{AB}}{24} = \frac{2.8^3}{24} = 42.667$

نعوض بالمعادلة الأساسية نجد :

$$0 + 2\left(0 + \frac{8}{2.5.EI}\right)M_A + \frac{8}{2.5\,EI}.M_B = -6.\left(0 + \frac{42.667}{2.5EI}\right) \Rightarrow$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\mathbf{6.4\,M_A + 3.2M_B = -102.4}$$

- **الفتحتين ABC:**

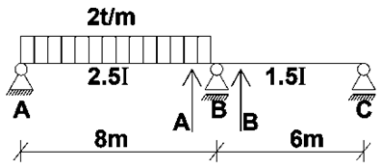


الحمولات المؤثرة مبينة في الشكل التالي

ولدينا: $l_{AB} = 8m$, $l_{BC} = 6m$, $I_{BC} = 1.5\,I$

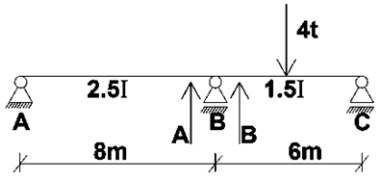
$I_{AB} = 2.5\,I$

الفتحة AB: من تحميل الفتحة A–B ومن الجدول (2) نجد:



$A = q_i\frac{l_i{}^3}{4} = \frac{2.8^3}{24} = 42.667$ ، $B = 0$

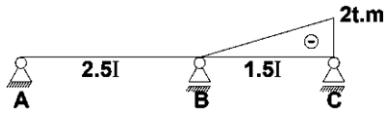
الفتحة BC:



من تحميل الفتحة BC بالقوة المركزة ومن الجدول (2) نجد:

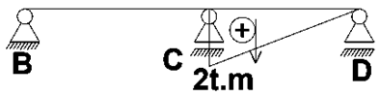
$A = 0$ $B = \frac{P_{i+1}.l^2{}_{i+1}}{16} = \frac{4.6^2}{16} = 9$,

وعند تحميل الفتحة BC بالعزم 2t.m المؤثر على المسند C لدينا خيارين في التحميل:



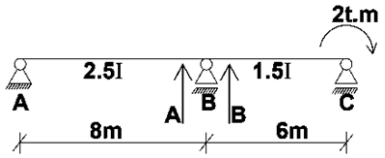
– إما أن نعتبر العزم مؤثر على الفتحة BC فيكون تأثيره بالشكل التالي:

(الإشارة سالبة كون الشد يحدث في الألياف العلوية)



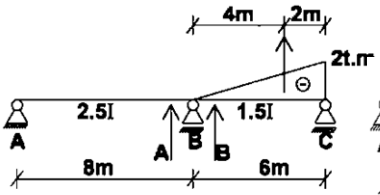
– أو نعتبر العزم مؤثراً على الفتحة CD وهنا يكون تأثيره كما هو مبين جانباً.

(الإشارة موجبة كون الشد يحدث في الألياف السفلية)

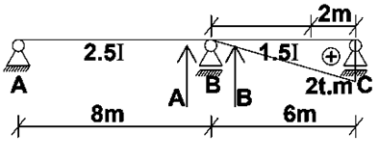


في مثالنا هذا سنعتبر العزم مؤثر على الفتحة BC فيكون:

ويكون شكل مخطط العزم ومقلوبه كما يلي:



مخطط العزم



مقلوب مخطط العزم

ويكون لدينا: A=0

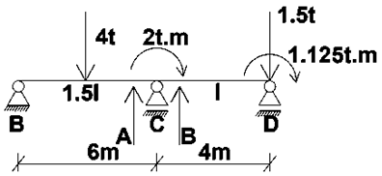
$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; B.6 + (A_{BC} = \frac{+2*6}{2}) * \frac{6}{3} \;\Rightarrow\; B = -2$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

$$\Rightarrow \frac{8}{2.5\,EI}.M_A + 2\left(\frac{8}{2.5\,EI} + \frac{6}{1.5.EI}\right)M_B + \frac{6}{1.5\,EI}.M_c = -6(\frac{42.667}{2.5EI} + \frac{9}{1.5EI} + \frac{-2}{1.5EI})$$

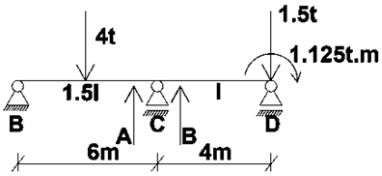
$$\mathbf{3.2.}M_A + \mathbf{14.4}M_B + \mathbf{4.}M_c = \mathbf{-130.4} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

– **الفتحتين BCD**: الحمولات المؤثرة هي:



$$l_{AB} = 6m \;,\quad I_{AB} = 1.5I$$
$$l_{BC} = 4m \;,\quad I_{BC} = 1I$$

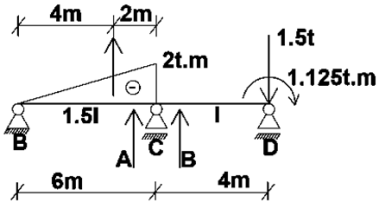
الفتحة BC:



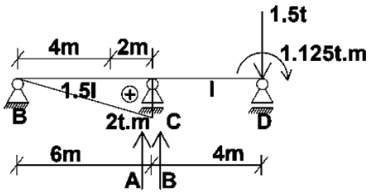
–من تأثير القوة المركزة ومن الجدول (1) نجد:

$$A = \frac{P_{i+1}.l^2{}_{i+1}}{16} = \frac{4.\ 6^2}{16} = 9\ ,\quad B = 0$$

– من تأثير العزم: (هنا نهمل تأثير عزم المسند C على الفتحة CD حيث أُخذ تأثيره على الفتحة BC). ويكون شكل مخطط العزم ومقلوبه كما هو مبين:



مخطط العزم



مقلوب مخطط العزم

$$,\qquad B = 0\ \sum M_B = 0 \;\Rightarrow A.6 + \frac{+2*6}{2} * \frac{2*6}{3} \;\Rightarrow\; A = -4$$

نعوض في المعادلة الأساسية:

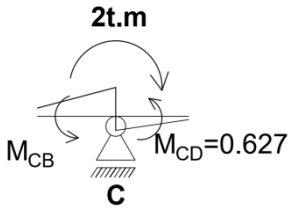
$$\frac{6}{1.5\,EI}.M_B + 2\left(\frac{6}{1.5\,EI} + \frac{4}{1.EI}\right)M_C + \frac{4}{1\,EI}.(-1.125) = -6(\frac{9}{1.5EI} + \frac{-4}{1.5EI} + 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4M_B + 16.M_c - 4.5 = -20$$

$$\mathbf{4}.\boldsymbol{M_B} + \mathbf{16}\,\boldsymbol{M_c} = \mathbf{-15.5} \ldots\ldots\ldots (\mathbf{3})$$

بحل المعادلات الثلاث (1) و (2) و (3) نجد :

$$\boldsymbol{M_A = -12.808\,t.m}, \qquad \boldsymbol{M_B = -6.383\,t.m}, \qquad \boldsymbol{M_c = +0.627\,t.m}$$

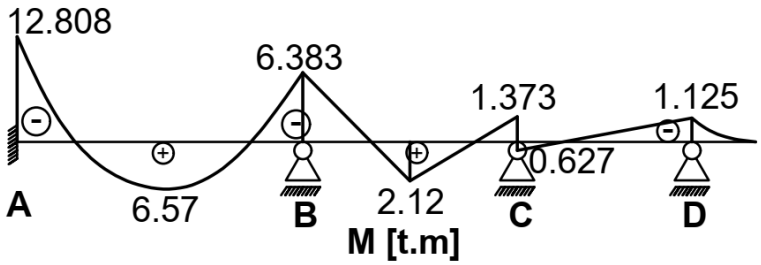


حتى تكون العقدة C متوازنة يجب أن يكون مجموع قيم العزوم عندها مساوٍ للصفر وبالتالي يكون:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + (M_{CD} = 0627) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{CB} = +1.373t.m$$

ويكون مخطط العزم بالشكل التالي:



المراجع:

١- حساب الإنشاءات 1 , الدكتور المهندس نبيل نادر 1981-1982 جامعة تشرين.

٢- ميكانيك الإنشاءات 1, الدكتور عصام ناصر 1994-1995, جامعة تشرين.

٣- محاضرات ميكانيك الإنشاءات 1, الدكتور رفيع مهنا, جامعة دمشق.

٤- تحليل المنشآت اللامقررة, الدكتور المهندس محمد عارف المهايني و المهندس محمد فاروق الزين, 1981.

٥- ميكانيك الإنشاءات, المهندس صفوان الطويل.

٦- الميكانيكا الإنشائية, أ. داركوف, ف. كوزنيتسوف, دار مير للطباعة و النشر, 1980.

****