مراجعة واستعراض للاهتزازات الميكانيكية (1)

Review and overview of mechanical vibrations (1)

د.م. محمد حمزة عرفة

1. المقدمة:

إن آثار الاهتزازات قد تكون كارثية إذا لم تدرس بشكل صحيح، فهي قد تؤدي إلى الانهيار الكامل للبنية الإنشائية، ولا سيما عندما يكون تردد مصدر الاهتزاز مساوياً لأحد ترددات طنين (resonance frequency) الجملة المهتزة، مع وجود تخميد في الجملة غير كافٍ لتخفيض مطالات الاهتزاز إلى قيم مقبولة، أو قد تؤثر على دقة الآلات الدقيقة، أو قد ينجم عنها عطب أحد الأجهزة، أو قد تسبب ضجيجاً كبيراً مزعجاً، فالجسم الصلب المهتز بشكل عام ينقل جزءاً ضئيلاً من طاقته إلى الهواء المحيط، فتنتقل عبره على شكل أمواج ضغط، فيسمع صوتاً، يزداد حدةً كلما كان الاهتزاز بجوار الطنين. ونظراً لأهمية هذا الموضوع وجدنا أنه من المفيد تسليط الضوء عليه.

2. تعريف:

إن أي حركة قادرة على تكرار ذاتها بعد فترة من الزمن تسمى اهتزازاً، هذا ويعتبر النواس والجملة الكتلية النابضية الأمثلة التقليدية للاهتزاز، ونظرية الاهتزاز تدرس الحركة الاهتزازية للأجسام والقوى المرتبطة بها.

3. مصادر الاهتزاز وظواهر المرونة الهوائية:

تعتبر الاهتزازات الميكانيكية (mechanical vibrations) من المسائل الهندسية الهامة التي يجب دراستها بعناية في العديد من المجالات، نذكر منها على سبيل المثال:

- البنى الإنشائية المدنية.
- البنى الإنشائية للمركبات الأرضية والبحرية والطائرة.
- عزل الاهتزازات عن أجهزة القياس والمعايرة الدقيقة الأرضية.
- عزل الاهتزازات عن الكتل المتنية المحمولة ضمن المركبات.
- تصميم الآلات ولاسيما التي تحتوي على أجزاء دوارة، وتخميد اهتزازاتها.

هذا وتجدر الإشارة إلى أن الجملة المهتزة يمكن أن تكون حرة أي أنها لا تخضع لقوة محرضة، أو قسرية عند وجود قوة محرضة، ,وتسمى الجملة القسرية بذاتية التحريض عندما تتبع القوة المحرضة لبرمترات الحركة كالانتقال أو السرعة أو التسارع، فيكون لدينا اقتران (coupling). أما فيما يتعلق بمصادر الاهتزاز التي تولد قوى التحريض فهي متنوعة، نذكر منها على سبيل المثال (مرجع1-2-3):

1- الزلازل.

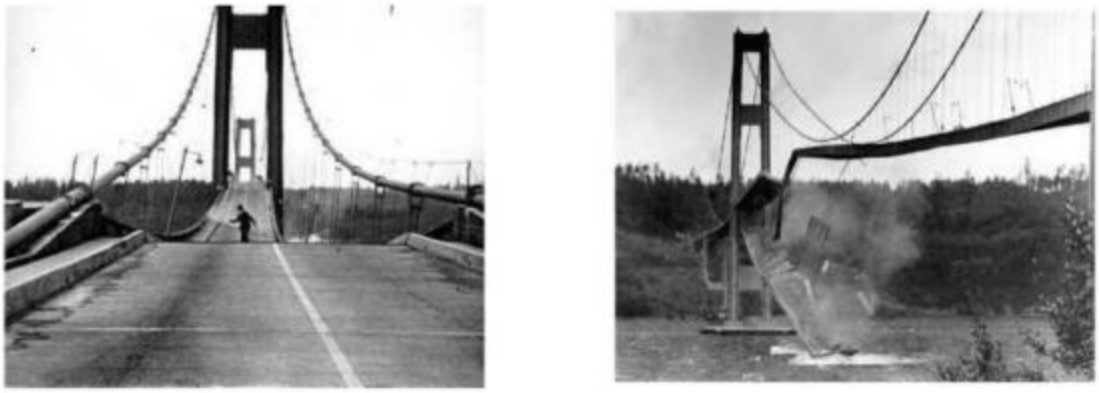
2- عدم توازن الأجزاء الدوارة في المحركات الناجم عن سوء التصميم أو سوء التصنيع.

3- الدوامات التي تشكلها الريح خلف جسم منتصب في الهواء (بناء مرتفع، صاروخ فضائي منتصب على قاعدة الإطلاق، ...) (Vibrations induced by vortices).

4- هبات الريح والمطبات الهوائية التي تتعرض لها الأجسام الطائرة أثناء الطيران (Vibrations induced by gust).

5- تداخل جريان المحركات النفاثة مع الهواء المحيط، يؤدي إلى توليد ضجيج صوتي – ذبذبات في الضغط – مرتفع جداً، وهذا يمكن أن يسبب في بعض الحالات اهتزازَ البنية الإنشائية للجسم الطائر.

بالعودة إلى الحالات التي يمكن أن يحدث فيها اقتران (Coupling)، هناك ظواهر مرونة هوائية (Aeroelasticity) ذاتية التحريض (self-induced vibrations) بين الهيكل الإنشائي والهواء الذي يجري حوله، كما في الجسور المعلقة وأجنحة الطائرات، وذلك نتيجة للتأثير المتبادل بين قوى المرونة وقوى العطالة الداخلية والقوى الأيروديناميكة الخارجية، من أخطر هذه الظواهر ظاهرة تعرف باسم الرجفان (Flutter)، والتي تحدث عند بلوغ الهواء سرعة معينة تسمى بالسرعة الحرجة، وهي ظاهرة خطيرة تؤدي إلى انهيار البنية الإنشائية كما في الشكل (1)، الذي يبين انهيار جسر تاكوما المعلق في ديتروت عام 1940 بسبب هذه الظاهرة، حيث حدث الانهيار عندما بلغ مطال الاهتزاز حداً لا تستطيع الجملة الإنشائية للجسر المعلق تحمله أو تخميده، وكذلك الأمر يؤدي الرجفان إلى انهيار أجنحة الطائرات حيث يهتز الجناح بمطالات اهتزازية كبيرة عند بلوغ السرعة الحرجة، هذه المطالات الاهتزازية الكبيرة لا تستطيع أن تتحملها البنية الإنشائية للجناح مما يؤدي إلى انهيارها. تجدر الإشارة إلى أن الرجفان هو فقدان للاستقرار الديناميكي، وهو بذلك يختلف عن ظاهرة الطنين التي أشرنا إليها في المقدمة، ففي الرجفان عند بلوغ السرعة الحرجة يصبح أحد أنماط الاهتزاز متباعداً وغير متخامد.



الشكل (1): انهيار جسر تاكوما المعلق في ديترويت عام 1940 بسبب ظاهرة مرونة هوائية تسمى الرجفان.

4. أنماط إشارات التحريض وطرق الحل:

إن طريقة حل معادلة الحركة الاهتزازية الخطية قد تختلف حسب نوع إشارة التحريض (مرجع3-4)، هذا ويمكن تصنيف إشارة التحريض وفق أحد الأنماط التالية:

1- جيبي: حيث يمكن استخدام طرق تحليلية أو عددية لحل معادلة الحركة وإيجاد تابع الاستجابة،

2- دوري: وهنا لإيجاد الاستجابة يمكن أن يحلل التحريض باستخدام سلاسل فوريه (Fourier series)، ومن ثم تحسب استجابة الجملة كمجموع لاستجابات الجملة محسوبة من أجل كل حد من حدود سلسلة فوريه على حده، وذلك استناداً إلى مبدأ جمع الآثار في الجمل الخطية.

3- غير دوري: وهنا يمكن أن تستخدم عدة طرق للحل كالطرق التحليلية (تحويل فوريه (Fourier transform) أو تحويل لابلاس (Laplace transform)، ... إلخ) أو الطرق العددية.

4- عشوائي: وهنا يمكن استخدام تحويل فوريه أو كثافة الطاقة الطيفية (power spectrum density).

5. الجملة الديناميكية وحيدة درجة الحرية (جملة التخميد النابضية الكتلية):

1.5 معادلة الحركة وأنواع التخميد:

تستخدم هذه الجملة الخطية (الشكل (2)) وحيدة درجة الحرية لنمذجة الجمل المهتزة البسيطة، وتكتب معادلة الحركة في حالة التخميد اللزج على الشكل التالي:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad (1)$$

حيث:

x(t): انتقال الكتلة (m)، وهو تابع للزمن، وذلك اعتباراً من وضع التوازن السكوني عندما يكون محور الفواصل موازياً للشاقول.

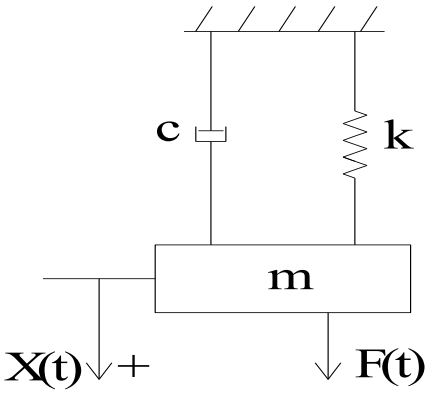
C: معامل التخميد (damping coefficient).

K: معامل صلابة النابض (stiffness modulus).

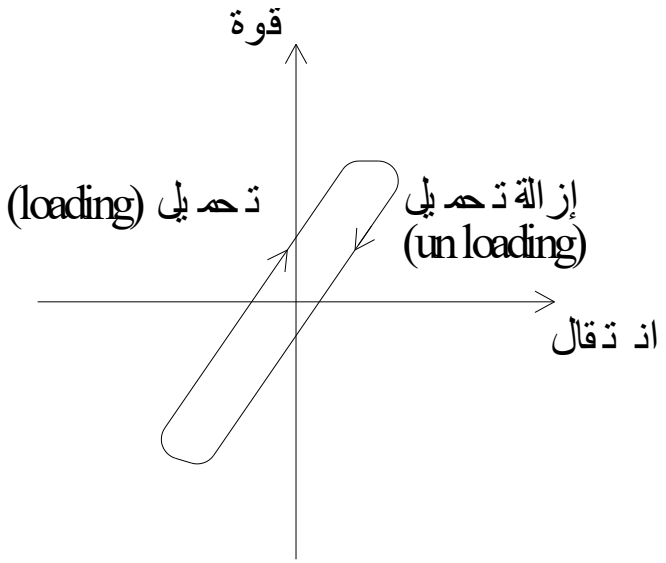
$F(t)$: (excitation force) قوة التحريض، وهي تابعة للزمن t في الحالة العامة.

إن وجود تخميد ضمن الجملة يؤدي إلى ضياع الطاقة الاهتزازية على شكل حرارة أو صوت، هذا وتجدر الإشارة إلى أن هناك عدة أنواع من المخمدات:

- تخميد لزج (viscous damping): تكون قوة التخميد متناسبة طرداً مع سرعة الجسم المهتز.
- تخميد احتكاكي جاف (dry friction damping): تكون قوة التخميد ثابتة في مطالها ومعاكسة في اتجاهها للحركة.
- تخميد مادي (material damping): ينجم عن انزلاق المستويات الداخلية للمادة أثناء تشوهها، وتتغير القوة الجيبية مع الانتقال على شكل عروة (hysteresis) (الشكل (3))، وهذا يشبه التخميد اللزج، لذا تتم نمذجتها بقوة تخميد لزج مكافئة (المرجع3).



الشكل (2): جملة مهتزة أحادية درجة الحرية.



الشكل (3): تتغير قوة التخميد مع الانتقال على شكل عروة في التخميد المادي.

2.5 حل معادلة الحركة الحرة (المرجع1-2-3-4-5-6):

إن حل معادلة الحركة يعني إيجاد التابع x(t)، الذي يصف حركة الكتلة المهتزة مع الزمن، وهنا لابد من التمييز بين عدة حالات:

1. حالة التخميد المعدوم: الحل العام جيبي، ويعطى التردد الطبيعي[1] بالعلاقة:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

2. حالة التخميد غير المعدوم: وهنا تتميز ثلاث حالات:

(1)- معامل التخميد يساوي القيمة الحرجة:

$$c = c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km} \qquad (3)$$

والحل غير دوري متخامد في هذه الحالة.

(2)- معامل التخميد أكبر من القيمة الحرجة، وهي حالة تخميد مفرط، والحل أيضاً غير دوري متخامد، وتسمى δ نسبة التخميد، وهي النسبة بين معامل التخميد والقيمة الحرجة للتخميد:

$$\delta = \frac{c}{c_c} \qquad (4)$$

وتكون $\delta>1$ في هذه الحالة.

(3)- معامل التخميد أصغر من القيمة الحرجة، وهي حالة تخميد ضعيف، والحل شبه جيبي متخامد، حيث يحسب ω' تردد الحركة بالعلاقة التالية:

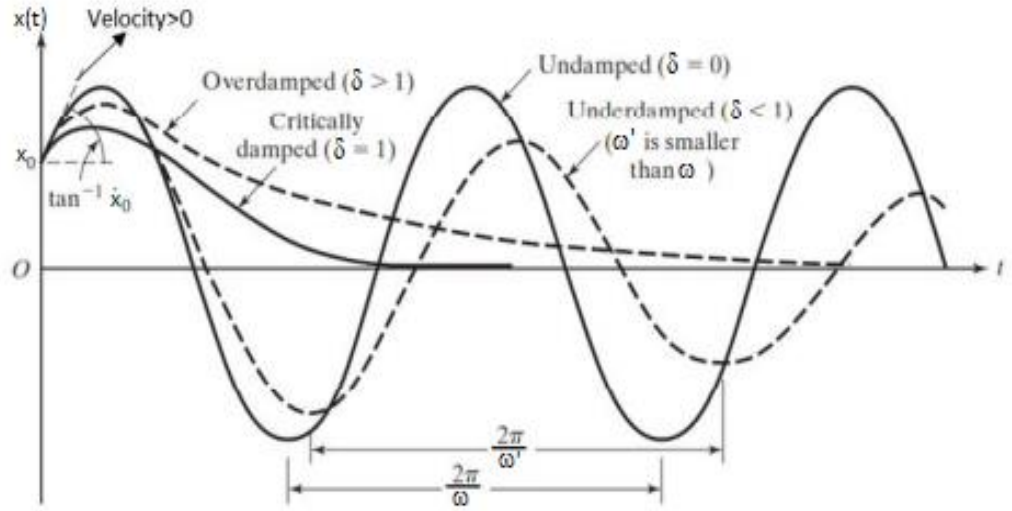
$$\omega' = \omega\sqrt{1-\delta^2} \qquad (5)$$

وتكون $\delta<1$ في هذه الحالة.

هذا ويلخص الشكل (4) الأشكال المختلفة لحركة المهتز وحيد درجة الحرية للحالات المذكورة آنفاً.

---

[1] المراجع الفرنسية تسميه النبض الذاتي أو الطبيعي (pulsation propre ou naturelle)، بينما المراجع الانكليزية تسميه التردد الطبيعي (natural frequency) وواحدته rd/s في الجملة الدولية.



الشكل (4): الحركات المختلفة لمهتز خطي حر وحيد درجة الحرية من أجل القيم المختلفة لنسب التخميد.

3 . 5 حل معادلة الحركة القسرية:

بفرض أن التحريض جيبي، وأن التخميد غير معدوم، فيكون حل معادلة الحركة هو حاصل جمع:

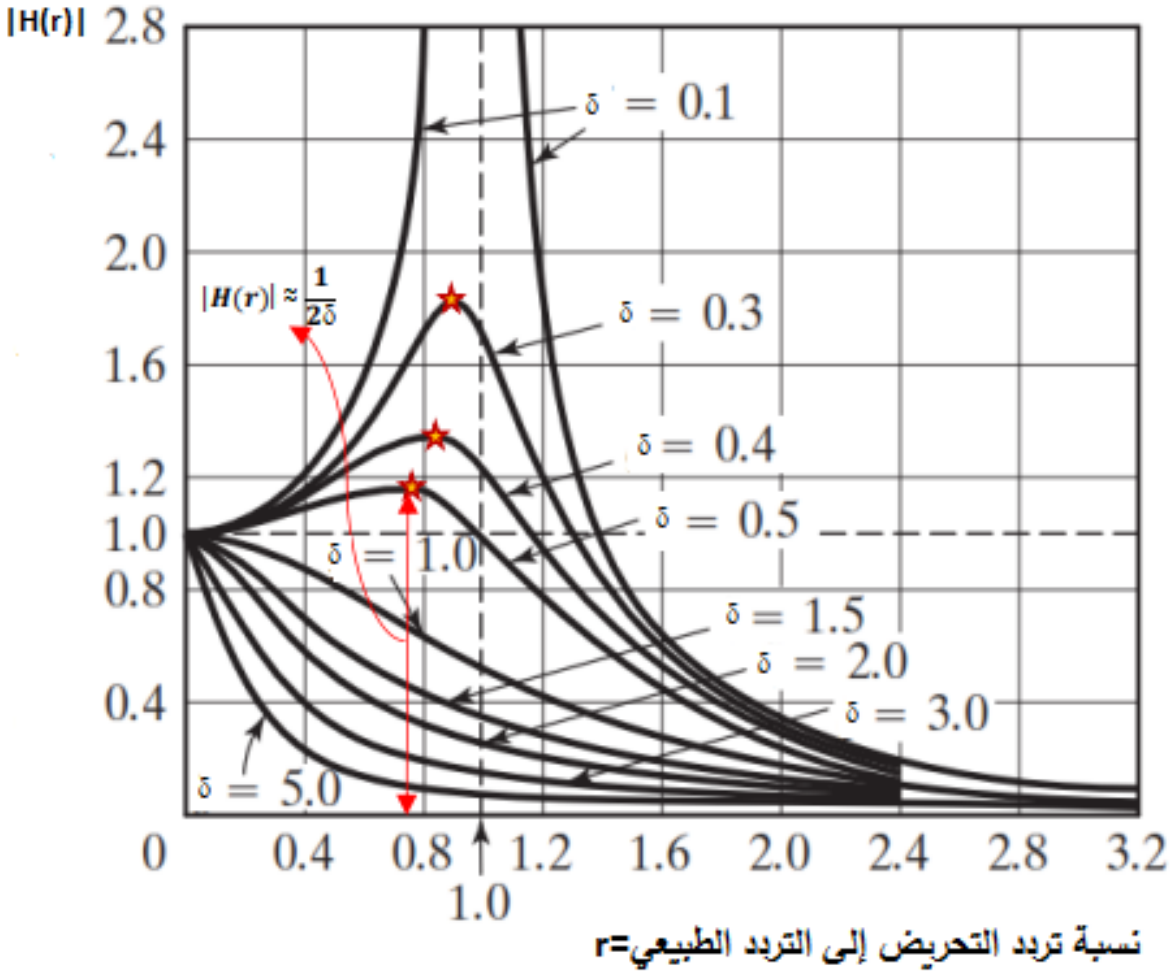
- الحل العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ، وهو حل مؤقت كونه متخامد كما رأينا في الفقرة السابقة، ويلخصه الشكل (4)،
- حل خاص للمعادلة مع طرف ثانٍ، وهو الحل الدائم (steady solution) للمعادلة (1)، وهو جيبي، ويعبر عن الاستجابة القسرية الدائمة للمهتز x(t)، وتردده مساوٍ لتردد التحريض.

هذا ونمثل في الشكل (5) معامل التضخيم الديناميكي |H(r)| على المحور الرأسي والنسبة (r) التي هي حاصل قسمة تردد التحريض على التردد الطبيعي على المحور الأفقي، ونعرف معامل التضخيم الديناميكي على أنه النسبة بين مطال الاهتزاز الديناميكي على المطال الاستاتيكي، وتجدر الإشارة إلى أن المطال الاستاتيكي هو حاصل قسمة مطال القوة على معامل صلابة النابض.

يبلغ مطال استجابة المهتز (الشكل (5)) قيماً أعظمية من أجل $\delta<\sqrt{2}/2$ عندما يساوي تردد التحريض تردد الطنين الذي يعطى في هذه الحالة بالعلاقة التالية:

$$\omega_R = \omega\sqrt{1-2\delta^2} \qquad (6)$$

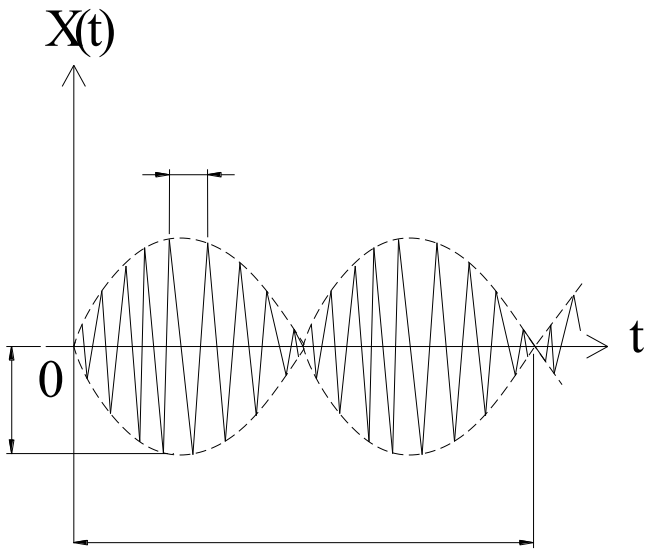
وتجدر الإشارة إلى أنه عندما تكون: $\delta \geq \sqrt{2}/2$، فإنه لا يوجد تردد للطنين ولا يمكن للطنين أن يحدث مهما كان تردد التحريض، وأنه عندما تكون الجملة غير مخمدة أي أن: $\delta=0$، فإن تردد الطنين يساوي التردد الطبيعي كما تبينه العلاقة (6)، ويصبح في هذه الحالة مطال الاهتزاز لانهائي عندما تكون $r=1$ كما يبينه الشكل (5).



الشكل (5): معامل التضخيم الديناميكي.

4.5 ظاهرة الخفقان (Beating phenomenon):

تحدث هذه الظاهرة (مرجع3) إذا كان تردد التحريض قريباً من تردد الطنين وغير مساوٍ له، ولشرح هذه الظاهرة تعتبر الحركة القسرية لجملة غير مخمدة، وبشروط ابتدائية معدومة للسرعة والانتقال، وليكن تردد التحريض أقل بقليل من تردد الطنين، فإن الكتلة ستهتز بحركة جيبية ذات مطال متغير بحركة جيبية أبطأ (الشكل (6)).



الشكل (6): مطال الكتلة المهتزة مع الزمن عند حدوث الخفقان.

6. جملة تخميد كتلية نابضية تخضع لحركة جيبية للقاعدة:

في الشكل (7) لدينا جملة خطية وحيدة درجة الحرية، تتعرض فيها القاعدة لحركة اهتزازية جيبية، تكتب معادلة الحركة للجملة في هذه الحالة على الشكل التالي (مرجع1–2–3):

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \qquad (7)$$

حيث:

x وy: تمثلان على الترتيب انتقال الكتلة والقاعدة في اللحظة t انطلاقاً من وضع التوازن الستاتيكي.

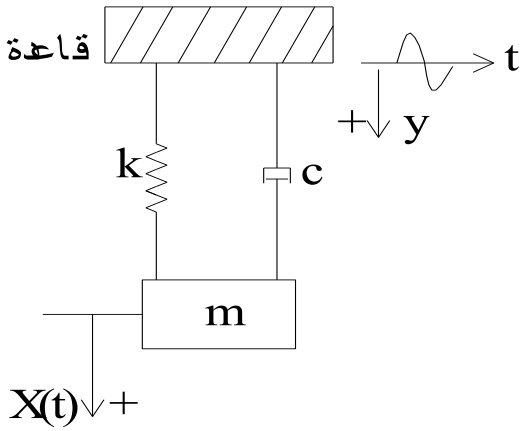
ومن أجل انتقال جيبي للقاعدة:

$$y(t) = Y\,sin\Omega t \qquad (8)$$

تصبح المعادلة (7) بعد التعويض:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Asin\Omega t + Bcos\Omega t \qquad (9)$$

حيث $A = kY$ و$B = c\Omega Y$، وبالتالي فإن المعادلة (9) تبين أن تطبيق حركة جيبية للقاعدة يكافئ تطبيق قوة جيبية على الكتلة، فالمعادلة (9) مماثلة للمعادلة (1) من حيث الصيغة.



الشكل (7): جملة مهتزة أحادية درجة الحرية تتعرض لتحريض من القاعدة.

7. الجمل الديناميكية ذات درجات الحرية المتعددة:

1.7 معادلة الحركة:

إن كثيراً من المسائل الهندسية تتم نمذجتها كجمل ديناميكية ذات درجات حرية متعددة، على سبيل المثال يمكن نمذجة الاهتزازات العرضية لبناء كما في الشكل(8)، كما يمكن أن تتم نمذجة الاهتزازات الطولية لصاروخ فضائي كما في الشكل(9)، وهي جمل ديناميكية ذات درجات حرية متعددة، حيث يتم توزيع الكتلة في كتل مركزة تربط بينها نوابض مكافئة ذات صلابة تساوي صلابة العناصر الإنشائية التي تربط بين الكتل، كما يمكن أن توجد مخمدات تربط بين الكتل، وباستخدام قانون نيوتن الثاني للتحريك أو معادلات لاغرانج تكتب معادلة الحركة بالشكل التالي:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \qquad (10)$$

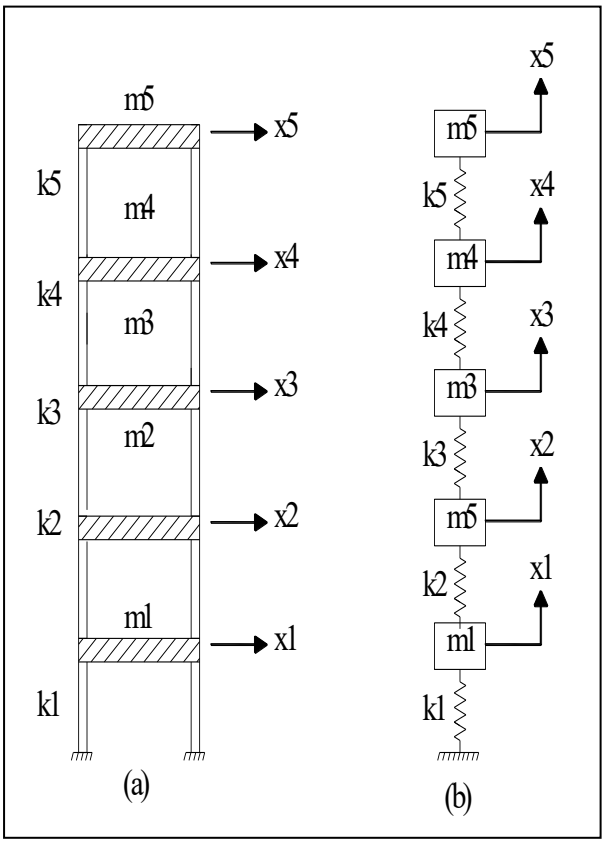
حيث:

$\{F\}$: شعاع القوة المطبقة.

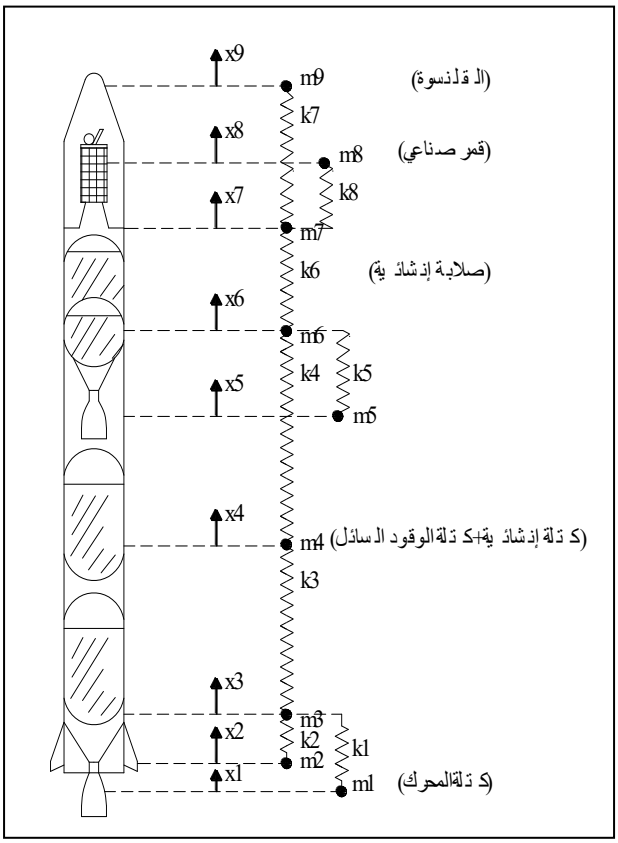
$\{X\}$: شعاع الانتقالات وهو ذو n درجة حرية.

$[K], [C], [M]$: وهي مصفوفات الكتلة، والتخميد والصلابة.

يستخدم عادة في حل هذه المعادلة التحليل النمطي (modal analysis)، وذلك من خلال البحث عن الأنماط الطبيعية (الذاتية[2]) (natural or normal modes)، والذي يسمح بتحويل معادلة الحركة المصفوفاتية (10) إلى جملة من معادلات الحركة المستقلة عن بعضها البعض، والتي كل منها وحيد درجة الحرية من الشكل (1)، والتي يمكن أن تحل بسهولة.



الشكل (8)



الشكل (9)

2.7 التحليل النمطي:

إن الأنماط الذاتية تشمل الأشكال النمطية (modal shapes) والنبضات الذاتية، وتحسب أنماط الحركة غير المخمدة، عندما تكون الجملة غير مخمدة أو ذات تخميد تناسبي مع الكتلة والصلابة، وهي الفرضية التي ستعتمد في هذا البحث، فالأشكال النمطية تعبر عن الأشكال التي تأخذها الجملة غير المخمدة عندما تهتز بالترددات الطبيعية، وهي أيضاً القيم والمناحي الخاصة للمصفوفة $[M]^{-1}[K]$، لذلك يتم الحصول على النبضات الذاتية ومصفوفة الأشكال النمطية $[\emptyset]$ من خلال حل مسألة إيجاد القيم والمناحي الخاصة للمصفوفة $[M]^{-1}[K]$.

[2] تستخدم هذه التسمية في المراجع الفرنسية (modes propres).

3 . 7 حل معادلة الحركة:

عند القيام بحل معادلة الحركة (المعادلة 10)، يستخدم تغيير المتحويل:

$$\{X\} = [\emptyset]\{q\} \qquad (11)$$

حيث $\{q\}$ شعاع الانتقال المعمم، فتصبح معادلة الحركة بعد ضربها بمنقول مصفوفة الأنماط من الشكل:

$$[\mu]\{\ddot{q}\} + [\eta]\{\dot{q}\} + [\rho]\{q\} = \{Q\} \qquad (12)$$

حيث المصفوفات الثلاث: $[\mu], [\eta], [\rho]$ مصفوفات قطرية (مرجع1–2–3–5–6)، ويمثل $\{Q\}$ شعاع القوة المعممة، وبالتالي المعادلة (12) تمثل جملة من المعادلات غير المقترنة (uncoupled)، أي المستقلة عن بعضها البعض، وذلك لمجموعة من المهتزات الخطية التي تم التطرق لها في الفقرة (5).

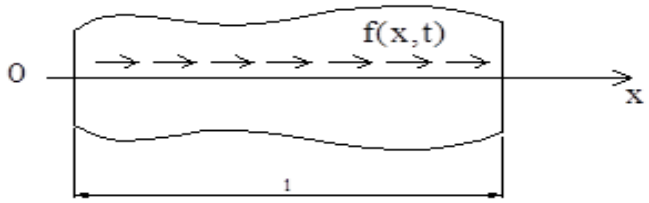
8. الاهتزازات في الأوساط المستمرة:

يعتبر حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تعبر عن حركة الاهتزاز في الأوساط المستمرة (continuous) أكثر تعقيداً من المعادلات التفاضلية العادية التي تعبر عن الاهتزاز في الأوساط المجزأة (discrete)، ويكون الحل أكثر دقة في حال الوسط المستمر منه في حال تقطيع الوسط، كما أنه يعطي عدداً لانهائياً من الترددات الطبيعية والأشكال النمطية، إلا أن عدد المسائل التي يمكن حلها تحليلياً بفرض أن الوسط مستمر محدود، لذا كثيراً مانلجأ إلى الطرق العددية، كطريقة العناصر المنتهية التي تتطلب تجزئة الوسط (مرجع7–8–9).

1.8 ديناميك العناصر الإنشائية الخطية (مرجع (1–2–3–5–6)):

1.1.8 الاهتزاز الطولي لقضيب (Longitudinal vibration of a bar):

يطلق اسم القضيب على كل عنصر إنشائي خطي يخضع للشد أو الضغط، وليكن لدينا قضيبٌ مرنٌ بطول (l) وسطح مقطع متغير A(x)، وكثافة كتلية متغيرة ρ(x)، تؤثر عليه قوة خارجية محورية موزعة على طوله l وذات شدة f(x,t) كما في الشكل (10)، حيث تعطى من أجله معادلة الحركة التالية للاهتزازات الطولية القسرية:



الشكل (10)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)=\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (13)$$

حيث E معامل يونغ، ويمثل $u(x,t)$ الانتقال الطولي للقضيب وهو تابع للزمن t والإحداثية x.

تصبح المعادلة (13) في حالة الاهتزاز الحر والقضيب منتظم (سطح المقطع والكثافة الكتلية ثابتان):

$$c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (14)$$

إن واحدات c هي واحدات سرعة، وهي تمثل سرعة انتشار موجة الاهتزاز المرن:

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (15)$$

2.1.8 الاهتزاز العرضي للجوائز (Lateral vibration of beams):

تعطى معادلة الاهتزاز العرضي القسري لجائز غير منتظم، يخضع لنظرية انعطاف الجوائز النحيفة أو ما يسمى بنظرية أولر–برنولي (Euler–Bernoulli)، وتطبق عليه قوة خارجية خطية f(x,t) ناظمية على خطه الأوسط، كما يلي:

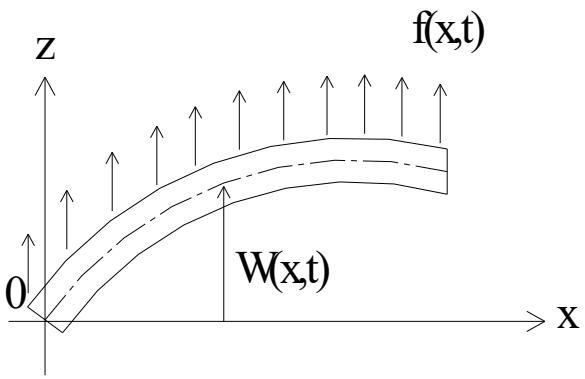
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right]+\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t) \qquad (16)$$

E يمثل معامل يونغ و I(x) عزم العطالة العرضي للمقطع حول المحور y، و w(x,t) يمثل الانزياح العرضي كما هو مبين في الشكل (11)، هذا وتبسط المعادلة في حالة الاهتزاز الحر من أجل جائز منتظم فتصبح:

$$c^2\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (17)$$

حيث تعطى c بالعلاقة:

$$c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (18)$$

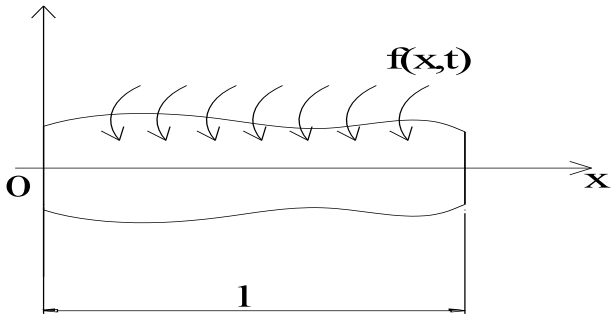


الشكل (11)

3.1.8 اهتزاز الفتل لمحور (Torsional vibration of a shaft):

يطلق اسم محور أو جذع على كل عنصر إنشائي خطي ذي مقطع دائري يخضع للفتل، وليكن لدينا عنصر مرنٌ بطول (l) (الشكل (12))، ox يمثل محور فتل العنصر، GJ(x) تمثل صلابته على الفتل، θ(x,t) زاوية دوران المقطع العرضي ذي الفاصلة (x)، يؤثر على العنصر عزم فتل خارجي موزع على واحدة الطول f(x,t)، J_0(x) ترمز لعزم العطالة الكتلي حول محور الفتل منسوباً لواحدة الطول، تكتب معادلة الحركة لاهتزازات الفتل القسرية لمحور غير منتظم بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right]+f(x,t)=J_0(x)\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad (19)$$



الشكل (12)

تصبح المعادلة (19) في حالة الاهتزاز الحر من أجل محور منتظم:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad (20)$$

لاحظ أن المعادلة التفاضلية (20)، والتي تعرف بمعادلة دالامبير عندما تكون من هذا الشكل، مشابهة تماماً لمعادلة الاهتزاز الطولي لقضيب (14).

4.1.8 الاهتزاز العرضي للكابلات والخيوط (Transverse vibration of a string or cable):

تعتبر الكابلات والخيوط (والأوتار) عناصر إنشائية خطية بدون صلابة على الانعطاف أو الفتل، وتكون في حالة شد منتظم، فبفرض أن وتراً بطول l يخضع لقوى عرضية $f(x,t)$ موزعة على واحدة الطول، ولقوة شد منتظمة N، وأن الانتقال العرضي $w(x,t)$ صغيراً، فتأخذ معادلة الحركة لوتر غير منتظم الشكل التالي:

$$N \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad (22)$$

وتصبح المعادلة (22) في حالة الاهتزاز الحر من أجل وتر منتظم:

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \qquad (23)$$

c تمثل سرعة انتشار موجة الاهتزاز المرن، والمعادلة التفاضلية (23)، هي أيضاً معادلة دالمبير، وتشبه معادلة الاهتزاز الطولي (14) واهتزاز الفتل (20).

2.8 اهتزاز الممبرانات والصفائح (المرجع2−3−6) (Vibration of membranes and plates):

إن الممبرانات (الأغشية) والصفائح هي عناصر فيها أحد الأبعاد (السماكة) أصغر بكثير من البعدين الآخرين. كما تعتبر الممبرانات تعميماً لحالة الخيوط والكابلات، فيجب أيضاً أن تكون في حالة شد ولا تتحمل أي عزم انعطاف (مثال وجه الطبل أو غلاف كرة)، ولا يشترط في الممبرانات أن تكون مستوية، فهي أحد أنواع القشريات (shells) (المرجع6)، أما الصفائح فتتحمل عزم الانعطاف ويجب أن تكون مستوية، ويمكن أن تهتز عرضياً (خارج مستوي الصفيحة) أو تهتز ضمن مستوي الصفيحة، وستعتبر للتبسيط فقط حالات من الاهتزازات الحرة غير المخمدة.

1.2.8 الاهتزاز العرضي للممبرانات:

بفرض أن ممبراناً مستوياً يقع في المستوي (ox,oy)، ذا سماكة h، في حالة شد منتظم (N) موزعة على واحدة الطول، w(x,y,t) تمثل الانتقال العرضي في اتجاه المحور (oz) لنقطة من المستوي الوسطي ذات إحداثيات (x,y)، تكتب معادلة اهتزاز الممبران بالشكل:

$$\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]w(x,y,t) \qquad (24)$$

حيث:

$$c^2 = \frac{N}{\rho h} \qquad (25)$$

وهي أيضاً معادلة من نوع معادلات دالامبير.

2.2.8 اهتزاز الصفائح:

ستفترض أن نظرية الصفائح الرقيقة (thin plate theory) أو مايعرف بنظرية لوف–كيرشوف (Love–Kirchhoff) محققة، وهنا سنميز حالتين:

أ– اهتزاز الصفائح عرضياً: حيث تكتب معادلة الاهتزاز من الشكل:

$$\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} + c^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]^2 w(x,y,t) = 0 \qquad (26)$$

$$c^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho} \qquad (27)$$

حيث تمثل ν نسبة بواصون لمادة الصفيحة، و$w(x,y,t)$ انتقال الصفيحة العرضي وفق المحور (oz).

ب– اهتزاز الصفائح ضمن مستوي الصفيحة: في هذه الحالة الجهود الداخلية المؤثرة هي فقط جهود في مستوي الصفيحة، لذا فإن المستوي الوسطي للصفيحة أثناء الاهتزاز يبقى مستوياً.

9. الخلاصة:

تم التطرق في هذه المقالة إلى تعريف الاهتزاز ومصادره وآثاره وأنماط إشارة التحريض، كما تم التطرق أيضاً إلى الجمل الديناميكية المجزأة وحيدة درجة الحرية وذات درجات الحرية المتعددة، وكذلك تم تبيان موضوع التحليل النمطي واستخدامه في حل معادلات الحركة، وقد تم أيضاً توضيح مسألة الطنين ومسألة فقدان الاستقرار الديناميكي التي نواجهها في ظاهرة الخفقان، إحدى ظواهر المرونة الهوائية، كما أشرنا إلى الخفقان وبينا شروط حدوثه، كذلك تم إعطاء معادلة الحركة لعدد من مسائل الاهتزازات في الأوساط المستمرة مع بعض الإيضاحات، وللاستزادة حول الاهتزازات الميكانيكية يمكن الرجوع إلى مقالتي الموجودة على الانترنيت حول هذا الموضوع (مرجع10).

10. المراجع:

1- Cyril M. Harris, Allan G. Piersol, “Harris’ shock and vibration handbook”, fifth edition McGraw Hill, USA, 2002.

2- Clarence W. de Silva, “Vibration and shock handbook”, Taylor & Francis group, USA, 2005.

3- Singiresu S. Rao, “Mechanical vibrations”, Prentice Hall, Fifth edition, USA, 2011.

4- Giora Maymon, ”Some engineering applications in random vibrations and random structures”, AIAA, USA, 1998.

5- Coffignal Gérard, “Cours de mécanique”, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, France, 1989.

6- Laroze Serge, “Mécanique des structures- Tome 5: Dynamique”, Ecole Nationale Supérieure de l’Aeronautique et de l’Espace, France, 1991.

7- Jean-Louis Batoz, Gouri Dhatt, ”Modélisation des structures par elements finis”, Hermès, France, 1990.

8- Klaus-Jürgen Bathe, ”Finite element procedures”, Prentice-Hall, USA, 1996.

9- O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor,”The finite element method”, McGraw-Hill, UK, 1991.

10- أ.د. محمد حمزة عرفة، "الاهتزازات الميكانيكية"، الموسوعة العربية، موسوعة العلوم والتقانات، المجلد الرابع، دار الفكر، دمشق، 2018.

11. قائمة المصطلحات:

اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الإنكليزية
قضيب	barre	bar
جائز	poutre	beam
ظاهرة الخفقان	Phénomène de battement	beating phenomenon
كبل	cable	cable
معامل تخميد	coefficient d'amortissement	damping coefficient
احتكاك جاف	frottement sec	dry friction
القيم الخاصة	valeurs propres	eigenvalues
المناحي الخاصة	vecteurs propres	eigenvectors
قوة التحريض	force d'excitation	excitation force
عروة	hystérésis	hysteresis
اهتزاز طولي	vibration longitudinale	longitudinal vibration
اهتزاز عرضي	vibration latérale	lateral vibration
تخميد مادي	amortissement matériel	material damping

membrane	membrane	ممبران (غشاء)
modal shape	forme modale	الشكل النمطي
modal analysis	analyse modale	تحليل نمطي
natural frequency	pulsation propre (naturelle)	التردد الطبيعي أو النبض الذاتي
plate	plaque	صفيحة
power spectrum density	Densité spectrale de puissance	الكثافة الترددية للطاقة
response	réponse	استجابة
resonance	résonance	طنين
shaft	arbre	محور (جذع)
string	fils	خيط
shells	coques	قشريات
solution	solution	حل
steady	stationaire	دائم
transverse vibration	vibration transeversale	اهتزاز عرضي

torsional vibration	vibration de torsion	اهتزاز فتل
transient	transitoire	عابر
viscous damping	frottement visqueux	تخميد لزج