JWPU
Journal of Al-Wataniya Private University
ISSN: 3105-2150

Volume (2) Number (1)
Available at: https://wpu.edu.sy/wpuj/index.php/wpuh/en

Studying The Intersection Of Rotational Cylinders Analytically And Graphically To Obtain The Unfolding Of The Intersection Curve

Dr. Waad Samir Attiah [1,*]

ABSTRACT

The problem of intersection between rotational cylindrical bodies is considered as a problem of special importance, either in theoretical studies, or in practical applications, such that in water supply projects, irrigation projects, oil and gas projects and other industrial projects that involves piping and cylindrical tanks works.

In this paper we will study the problem of intersection between rotational cylindrical bodies. We will solve this problem using the analytical method and the graphical method. The analytical solution includes acquiring the equations of the resulting intersection curve, whereas in the graphical solution, which relies on descriptive geometry and the method of auxiliary spheres, the result is acquiring the shape of the intersection curve and determining its projections. In spite of the importance of reaching the intersection curve, the acquiring of the unfolding of the intersection curve and its graphical plot is more important and it is the aim of this research. We will demonstrate this issue via a numerical practical example including various cases of studied intersection.

KEYWORDS: Cylindrical Rotational Bodies Intersection, Analytical Solution, Graphical Solution, Intersection Curve Representation.

Submitted on February 28, 2024; Revised on March 27, 2024; Accepted on April 16, 2024.
© 2024 Al-Wataniya Private University. This work is licensed under the Creative Commons Attribution–NonCommercial–NoDerivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0) license.

1 Faculty of Engineering, Al-Wataniya Private University, Hama, Syria.

* Corresponding author. E-mail address: waed.atteiah@wpu.edu.sy

دراسة تقاطع الأجسام الدورانية الأسطوانية تحليلياً وتخطيطياً للحصول على منشور منحني التقاطع

د. وعد سمير عطية

الملخص

إن مسألة تقاطع الأجسام الدورانية الأسطوانية تعتبر من المسائل ذات الأهمية الخاصة، سواءً في الدراسات النظرية أو في التطبيقات العملية، كما في مشاريع الإمداد بالمياه ومشاريع الري ومشاريع النفط والغاز وغيرها من المشاريع الصناعية التي تتضمن أعمال الأنابيب والخزانات الأسطوانية الشكل.

في هذا البحث سنقوم بدراسة مسألة تقاطع الأجسام الدورانية الأسطوانية. وذلك بحلها بالطريقة التحليلية وبالطريقة التخطيطية. حيث في الطريقة التحليلية نحصل على المعادلات الخاصة بمنحني التقاطع الناتج، أما ناتج الحل التخطيطي الذي يستند على أسس الهندسة الوصفية وطريقة الكرات المساعدة فهو الحصول على شكل منحني التقاطع وتحديد مساقطه. وعلى الرغم من أهمية الحصول على منحني التقاطع ومعادلته ومساقطه، فإن الوصول إلى منشور منحني التقاطع وتمثيله بيانياً هو الأهم وهو غاية هذا البحث، وهذا ما سنبينه من خلال مثال عملي عددي يتضمن عدة حالات للتقاطع المدروس.

الكلمات المفتاحية: تقاطع الأجسام الدورانية الأسطوانية، الحل التحليلي، الحل التخطيطي، منحني التقاطع.

1. مقدمة

تعتبر دراسة تقاطع الأجسام الأسطوانية الدورانية من المواضيع المهمة في مجالات الهندسة والفيزياء، حيث يلعب فهم هذه التقاطعات دورًا حيويًا في تصميم وتطبيق الأنظمة الهندسية المختلفة، مثل شبكات الأنابيب والخزانات. تتنوع حالات تقاطع الأسطوانات وفقاً لأبعادها وزوايا تقاطعها، مما يستدعي تحليلاً دقيقًا وممنهجاً لمختلف السيناريوهات، بما في ذلك تقاطع أسطوانتين بأقطار متساوية وأخرى مختلفة، أو تلك التي تتقاطع محاورها بزاوية قائمة أو بزاوية مائلة [1][2].

يتطلب الكشف عن منحنى التقاطع تقنيات هندسية متقدمة، مثل الهندسة الوصفية، التي تتيح لنا تمثيل هذا المنحنى من خلال إسقاطه على مستويات الإسقاط المتعامدة. هذه الطريقة لا تسهل فقط تصور منحنى التقاطع، بل تسمح أيضًا بإمكانية نشر هذا المنحنى في التصاميم الهندسية بشكل فعال، مما يعزز كفاءة التطبيق في المشاريع المعقدة . سنتناول أيضًا تأثير اختلاف الأقطار على شكل منحنى التقاطع، محددين كيفية تحقيق ذلك عند تعامد الأسطوانتين أو في حال عدم تعامدهما [3] [4].

تجدر الإشارة إلى أن تقنيات تحليل تقاطع الأسطوانات يمكن تطبيقها بطرق مختلفة، بما في ذلك الطريقة التخطيطية من خلال استخدام المستويات أو الكرات المساعدة، والتي تتميز بسرعة التحقيق وإمكانية التطبيق على الأسطح الدورانية الممثلة في مستوٍ وحيد. وكذلك، سيكون لدينا اهتمام خاص في البحث عن العلاقة الرياضية المتعلقة بمنحنى التقاطع من خلال الطريقة التحليلية [5]. حيث سنبرز أوجه التشابه بين الأساليب المختلفة في معالجة هذه الحالات الهندسية الشائعة، ما سيعزز من دقة النتائج وأهميتها في التطبيقات العملية.

سنتناول في هذا السياق خطوات الحل من خلال الطريقة التحليلية أولًا، ثم ننتقل لدراسة الحل بواسطة الطريقة التخطيطية، مع التركيز على الحالات الأكثر شيوعًا التي تتضمن تقاطع السطوح الأسطوانية ذات المحاور المتقاطعة والموازية لمستوى الإسقاط الشاقولي [6] [7]. بذلك، نسعى لتقديم رؤية شاملة ومتكاملة حول هذه المسألة الهندسية بكافة اشكالها .

2. مواد البحث وطرائقه

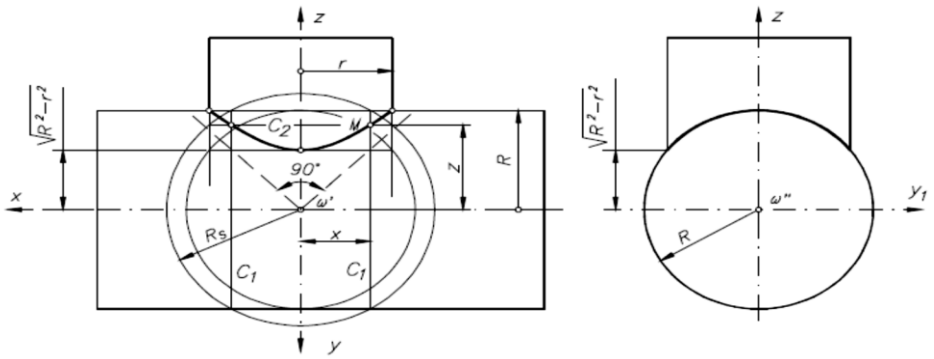
يتميز تقاطع الأجسام الأسطوانية الدورانية بتنوعه، حيث يختلف وفقًا لأبعاد هذه الأجسام وزوايا تقاطعها، مما يتطلب إجراء تحليل منهجي يغطي العديد من السيناريوهات، بما في ذلك تلك التي تشمل أسطوانات ذات أقطار متساوية وأخرى بأقطار مختلفة، أو تلك التي تتقاطع بزاوية قائمة أو مائلة. يتطلب هذا الكشف استخدام تقنيات هندسية متقدمة كالهندسة الوصفية، التي تساعد في تمثيل منحنى التقاطع بشكل دقيق عبر إسقاطه على مستويات الإسقاط المتعامدة. ومن خلال استخدام هذه

الطريقة، يمكن تجسيد المنحنى بشكل فعال في التصاميم الهندسية، مما يحسن من كفاءة المشاريع المعقدة. يُعتبر التأثير الناتج عن اختلاف الأقطار على منحنى التقاطع محوريًا، مما يستدعي دراسة مستفيضة حول كيفية تقاطع الأسطوانات في حالات تعامدها وعدم تعامدها. تشمل طرق التحليل المستخدمة في هذا البحث الطريقة التخطيطية، التي تستفيد من مستويات أو كرات مساعدة، كونها توفر نتائج سريعة وقابلة للتطبيق على الأسطح الدورانية. علاوةً على ذلك، سيتناول البحث الروابط الرياضية المرتبطة بمنحنى التقاطع من خلال الطريقة التحليلية، مما يعزز من دقة النتائج وأهميتها في التطبيقات الهندسية. سيتم عرض خطوات الحل أولًا باستخدام الطريقة التحليلية، تليها دراسة الحل بالطريقة التخطيطية، مع التركيز على الحالات الأكثر شيوعًا مثل تقاطع الأسطوانات ذات المحاور المتقاطعة والموازية لمستوى الإسقاط الشاقولي. من خلال هذا المنهج، نسعى لتقديم نظرة شاملة للأبعاد الهندسية الخاصة بتقاطع الأسطوانات، مستعرضين التعقيدات العملية المرتبطة بها.

1.2 تقاطع أسطوانتين دورانيتين وفق الطريقة التحليلية

ليكن لدينا الأسطوانة الدورانية المبينة في الشكل (1). إن معادلة الأسطوانة الشاقولية التي نصف قطرها r ومحور تناظرها OZ هي:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



الشكل (1): تقاطع أسطوانتين دورانيتين $R \rangle r$

إن معادلة الأسطوانة الأفقية التي نصف قطرها R ومحور تناظرها OX هي:

$$\left.\begin{aligned} z^2 + y^2 &= R^2 \\ x &= x \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

إن تقاطع الأسطوانتين الممثلتين بالمعادلتين (1) و (2) هو عبارة عن منحنٍ فراغي مسقطه الشاقولي هو قطع زائد متساوي الفرعين معادلته هي:

$$z^2 - x^2 = R^2 - r^2 \qquad (3)$$

من أجل $x = \pm r$ فإننا نحصل على $z = \pm R$، والتي هي عبارة عن نقطتي تقاطع مولدات الكونتور الظاهري للأسطوانتين الممثلتين في الشكل (1).

من أجل $x = 0$ فإننا نحصل على $z = \pm\sqrt{R^2 - r^2}$، والتي هي عبارة عن ذروتي فرعي القطع الزائد والواقعتين على المحور OZ.

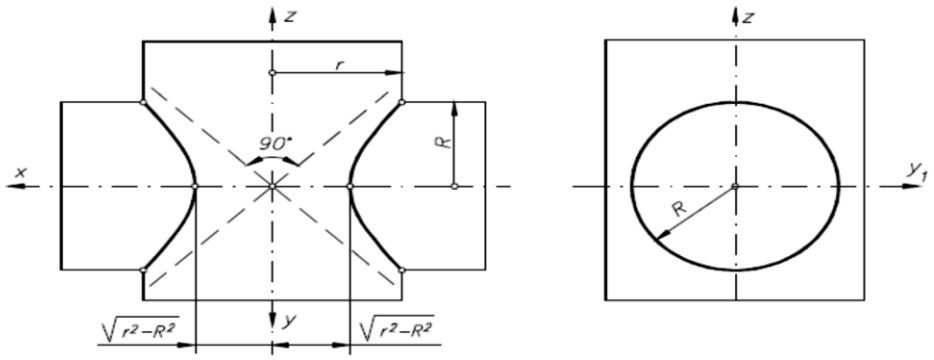
من أجل $R = r$ فإن المعادلة (3) تأخذ الشكل التالي:

$$(z - x)(z + x) = 0 \qquad (4)$$

المستقيمان الممثلان بالمعادلة (4) هما الخطان المقاربان المتعامدان لفرعي القطع الزائد.

من أجل $r \rangle R$ فإن المعادلة (3) تأخذ الشكل التالي:

$$x^2 - z^2 = r^2 - R^2 \rangle 0 \qquad (5)$$



الشكل (2): تقاطع أسطوانتين دورانيتين $R \langle r$

2.2 تقاطع أسطوانتين دورانيتين وفق الطريقة التحليلية

لنأخذ كرة مساعدة نصف قطرها R_s متقاطعة مع الأسطوانتين المدروستين. إن ناتج التقاطع هو الدائرة C_1 بالنسبة للأسطوانة التي قطرها R، والدائرة C_2 بالنسبة للأسطوانة التي نصف قطرها r، كما هو موضح في الشكل (1).

إن النقطة M المشتركة بين الدائرتين C_1 و C_2 هي نقطة تقع على منحنى تقاطع الأسطوانتين، ويمكن حساب إحداثيات هذه النقطة عن طريق المعادلتين التاليتين:

$$x^2 = R_s^2 - R^2 \qquad (6)$$

$$z^2 = R_s^2 - r^2 \qquad (7)$$

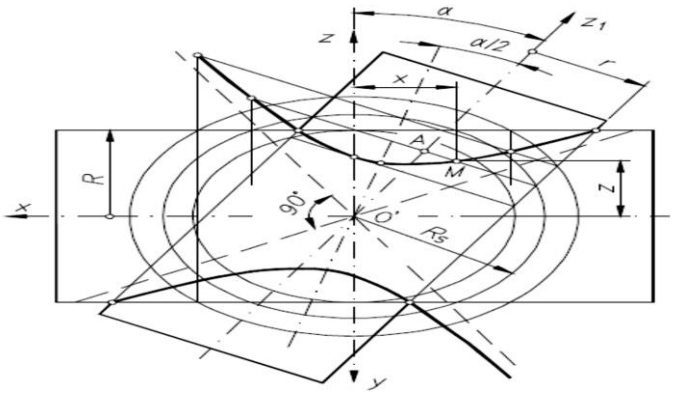
ونحذف R_s من المعادلتين (6) و (7) نطرح المعادلتين من بعضهما، وبالإصلاح نحصل على المعادلة (8) التي هي معادلة المسقط الشاقولي لمنحني تقاطع الأسطوانتين.

$$z^2 - x^2 = R^2 - r^2 \qquad (8)$$

بالتدقيق نجد أن المعادلة (8) متطابقة مع المعادلة (3)، وهي تمثل فرعي القطع الزائد الذي محور تناظره OZ.

كما هو مبين في الشكل (3)، فإن المسقط الشاقولي لمنحني التقاطع هو أيضاً قطع زائد في الحالة العامة. بالتالي فإن الإحداثي x للنقطة M الواقعة على منحني التقاطع يمكن إيجاده عن طريق أخذ منحنيات مساعدة وسنجد أن:

$$x^2 = R_s^2 - R^2 \qquad (9)$$



الشكل (3): تقاطع أسطوانتين دورانيتين محوراهما غير متعامدين $R \rangle r$

من الشكل (3) نلاحظ أن:

$$OA^2 = R_s^2 - r^2 \qquad (10)$$

إن معادلة المستقيم المار عبر النقطة A والعمود على المحور z_1 للأسطوانة المائلة التي نصف قطرها r هي:

$$z = -x\tan\alpha + \frac{OA}{\cos\alpha} \qquad (11)$$

وبالتعويض نجد:

$$z = -x\tan\alpha + \frac{\sqrt{R_s^2 - r^2}}{\cos\alpha} \qquad (12)$$

وبحذف R_s من المعادلتين (9) و (12) والإصلاح، فإننا نحصل على المعادلة التي تحدد المحل الهندسي لجملة النقاط M، وهي:

$$z^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\left(1+\sin^2\alpha\right)x^2 - r^2 + R^2 - 2x\sin\alpha\sqrt{x^2+R^2-r^2}\right] \qquad (13)$$

بما أن أمثال الحد x^2 الوارد في المعادلة (13) هي موجبة دائماً، فإننا نستنتج أن هذه المعادلة هي معادلة قطع زائد.

من أجل $\alpha = 0$ فإن المعادلة (13) تأخذ الشكل التالي:

$$z^2 - x^2 = R^2 - r^2 \qquad (14)$$

وهي معادلة قطع زائد متساوي الفرعين وهي متطابقة مع المعادلة (8).

من أجل $R = r$ فإننا سوف نحصل على المعادلة التالية:

$$z^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}x^2\left(1+\sin^2\alpha \pm 2\sin\alpha\right) \qquad (15)$$

وبالتعويض نجد:

$$z^2 = \frac{\left(1\pm\sin\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha}x^2 \qquad (16)$$

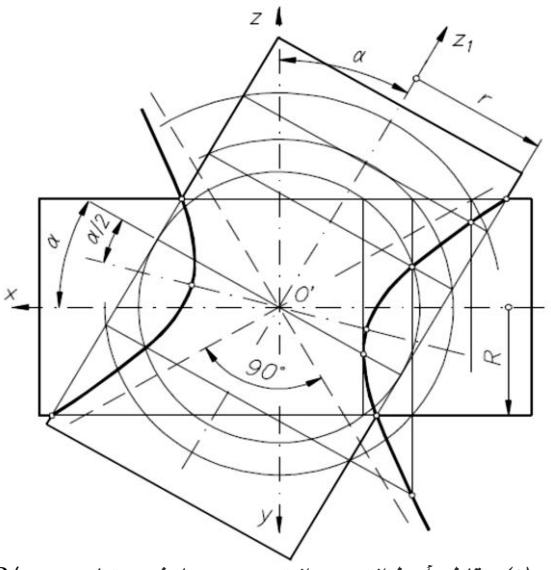
المستقيمان الممثلان بالمعادلة (16) هما الخطان المقاربان المتعامدان لفرعي القطع الزائد، كما في الشكل (3).

من أجل $x = 0$، فإن:

$$z^2 = \frac{(R^2 - r^2)}{\cos^2 \alpha} \qquad (17)$$

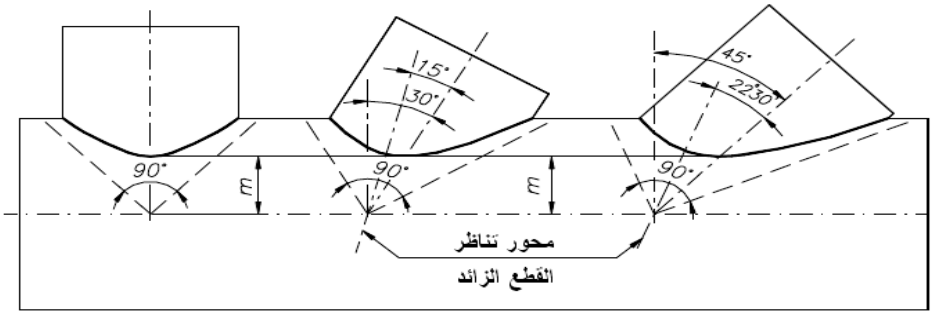
وهي عبارة عن نقاط تقاطع القطع الزائد.

من أجل $R\langle r$ يكون $R^2 - r^2\langle 0$، وفي هذه الحالة يكون القطع الزائد كما يبين الشكل (4).



الشكل (4): تقاطع أسطوانتين دورانيتين محورهما غير متعامدين $R\langle r$

بدراسة الشكلان (3) و (4) فإنه يمكننا أن نلاحظ أنه بتدوير الأسطوانة الشاقولية بزاوية مقدارها 90 سيتسبب بدوران محور التناظر لفرعي القطع الزائد بزاوية مقدارها90 (2)، ويملك نفس الخطين المقاربين الممثلين بالمعادلة (4). إن نقطتي تقاطع مولدات الكونتور الظاهري ونقاط الذرة لفرعي القطع الزائد يتم تحديدها بشكل مشابه لما هو وراد في القطع الزائد المثل في الشكل (1).

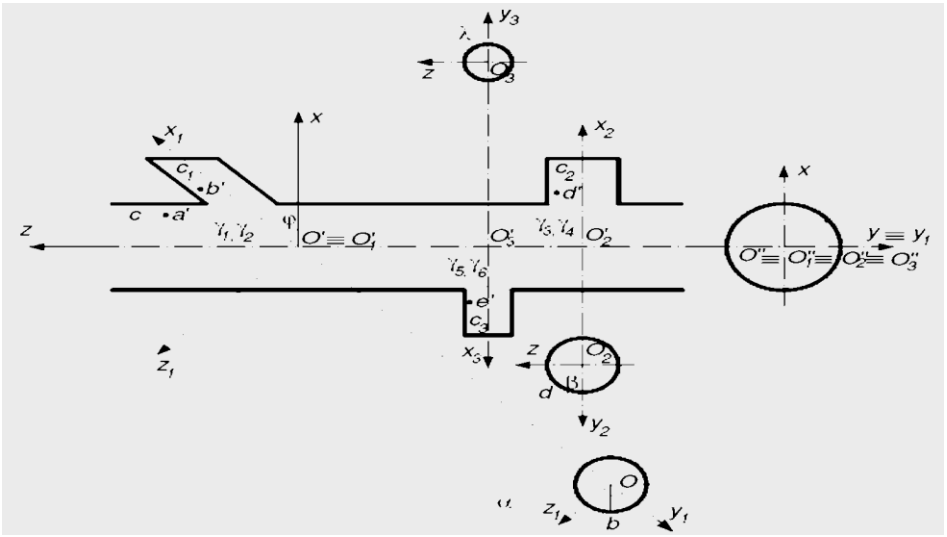


الشكل (5): عدة أشكال لمنحني تقاطع أسطوانتين دورانيتين

يبين الشكل (5) عدة حالات للتقاطع كما يبين الأشكال المختلفة للقطع الزائد متساوي الفرعين الناتج عن التقاطع وذلك في حالة تقاطع أسطوانة أفقية مع أسطوانة شاقولية وأخرى مائلة بزاوية X مع

الشاقول وأخيرة مائلة بزاوية X مع الشاقول. يمكننا أن نلاحظ أن النقاط الأخفض من منحني التقاطع في كل الحالات لها نفس الوضعية.

3. النتائج ومناقشتها



الشكل (6): عناصر الأسطوانات الأربع المدروسة

إن الحسابات المتعلقة بنشر السطوح الدورانية لها تطبيقات عديدة، خصوصاً عند دراسة تقاطعات الأنابيب المتساوية الأقطار أو المختلفة الأقطار [10][9]. سوف نقوم بدراسة منحني التقاطع الكائن بين الأجسام الأسطوانية الدورانية من أجل الوصول إلى نشر هذا المنحني من خلال مثال تطبيقي عددي.

من أجل توضيح هذه الفكرة سوف ندرس أربع أسطوانات هي كالتالي:

الأسطوانة C قطرها $D = 48mm$

الأسطوانة C_1 قطرها $D_1 = 30mm$

الأسطوانة C_2 قطرها $D_2 = 30mm$

الأسطوانة C_3 قطرها $D_3 = 20mm$

وبحيث يكون $O_2O_3 = 40mm$ و $OO_3 = 80mm$ و $\varphi = 45°$.

إن إيجاد مساقط منحنيات التقاطع تتطلب حلاً وفق المرحلتين التاليتين:

- صياغة معادلات المنحنيات الناتجة عن تقاطع الأجسام المطلوب نشرها.
- صياغة معادلات التحويلات لمنحنيات التقاطع المنشورة وتمثيلها بيانياً.

1.3 إيجاد منحني التقاطع γ_1 للأسطوانة C ومنحني التقاطع γ_2 للأسطوانة C_1

من الشكل (1) سندرس تقاطع الأسطوانة C (والتي قطرها D وجملة محاورها الرئيسية هي $Oxyz$) مع الأسطوانة C_1 (والتي قطرها D_1 وجملة محاورها الرئيسية هي $O_1x_1y_1z_1$)، مع الأخذ بعين الاعتبار الوضعية الخاصة ما بين O و O_1 وما بين y و y_1.

إن معادلتي الأسطوانتين وفق جملة المحاور الرئيسية الخاصة بكل أسطوانة هما:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

$$y^2 + z_1^2 = R_1^2 \qquad (2)$$

فإذا قمنا بتدوير جملتي المحاور الرئيسيتين بالنسبة لبعضهما بالزاوية φ، فإن معادلات تحويل الإحداثيات من جملة المحاور $Oxyz$ إلى $O_1x_1y_1z_1$ وبالعكس ستكون:

$$x_1 = x\cos\varphi + z\sin\varphi \qquad (3)$$

$$z_1 = z\cos\varphi - x\sin\varphi \qquad (4)$$

$$x = x_1\cos\varphi - z_1\sin\varphi \qquad (5)$$

$$z_1 = x_1\sin\varphi + z_1\cos\varphi \qquad (6)$$

وباعتبار أن جملة المحاور $Oxyz$ هي الجملة المرجعية لكلتا الأسطوانتين ومعادلتيهما، وبعد حذف المتحول y، فإننا نحصل على معادلة المسقط الشاقولي لناتج التقاطع، وهي:

$$z^2 - 2x\tan\varphi\ z + \frac{R^2 - R_1^2}{\cos^2\varphi} - x^2 = 0 \qquad (7)$$

إن معادلة التحويل الخاصة بالمنحني γ_1 الخاص بالأسطوانة C يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (8) و (9) التاليتين على المعادلة (7).

$$x = R\cos\theta = R\cos x_d/R \qquad (8)$$

$$z = z_d \qquad (9)$$

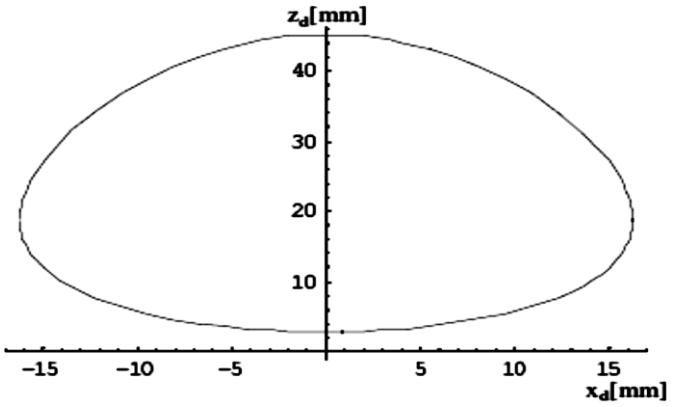
حيث أن x_d و z_d هما إحداثيا النقطة A بعد النشر. يتم تمثيل النقطة A عن طريق مسقطيها وعندئذ نحصل على العلاقة التالية:

$$z_d^2 - 2Rz_d \cos\frac{x_d}{R}\tan\varphi + \left[\frac{R^2 - R_1^2}{\cos^2\varphi} - R^2\cos^2\frac{x_d}{R}\right] \qquad (10)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{aligned} z_{d1,2} &= R\cos\frac{x_d}{R}\tan\varphi \pm \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{R_1^2 - R^2\sin^2\frac{x_d}{R}} \\ x_d &\in \{-R\arcsin R_1/R\,,\, R\arcsin R_1/R\} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (11)، فإننا نحصل على الشكل (7) الذي يمثل منحني التقاطع γ_1 الخاص بالأسطوانة C بعد النشر.



الشكل (7): منشور منحني التقاطع γ_1 الخاص بالأسطوانة C

أما معادلة المنحني γ_2 الخاص بالأسطوانة C_1 فإنه يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (12) و (13) التاليتين على المعادلة (7).

$$x_1 = x_{d1} \qquad (12)$$

$$z_1 = R_1\sin\alpha = R_1\sin z_{d1}/R \qquad (13)$$

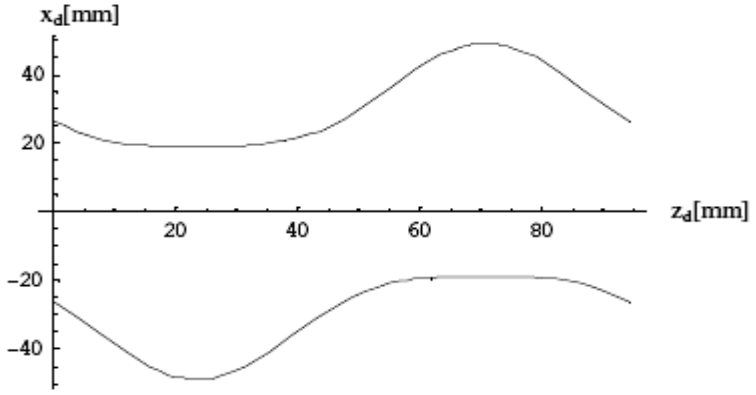
حيث أن x_{d1} و z_{d1} هما إحداثيا النقطة B بعد النشر. يتم تمثيل النقطة B عن طريق مسقطيها وعندئذ نحصل على العلاقة التالية:

$$x_{d1}^2 + 2R_1\sin\frac{z_{d1}}{R_1}x_{d1} - R_1^2\sin^2\frac{z_{d1}}{R_1} - \frac{R^2 - R_1^2}{\cos^2\varphi} = 0 \qquad (14)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{aligned} x_{d1} &= -R\sin\frac{z_{d1}}{R_1} \pm \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{R^2 - R_1^2\cos^2\frac{z_{d1}}{R_1}} \\ z_{d1} &\in \{0, 2\pi R_1\} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (15)، فإننا نحصل على الشكل (8) الذي يمثل منحني التقاطع γ_2 الخاص بالأسطوانة C_1 بعد النشر.



الشكل (8): منشور منحني التقاطع γ_2 الخاص بالأسطوانة C_1

2.3 إيجاد منحني التقاطع γ_3 للأسطوانة C ومنحني التقاطع γ_4 للأسطوانة C2

من الشكل (1) سندرس تقاطع الأسطوانة C (والتي قطرها D وجملة محاورها الرئيسية هي $Oxyz$) مع الأسطوانة C_2 (والتي قطرها D_2 وجملة محاورها الرئيسية هي $O_2x_2y_2z_2$)، مع الأخذ بعين الاعتبار الوضعية الخاصة ما بين x و x_2 وما بين y و y_2 وما بين z و z_2.

حيث : D=2R

إن معادلتي الأسطوانتين وفق جملة المحاور الرئيسية الخاصة بكل أسطوانة هما:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (16)$$

$$y^2 + z^2 = R_2^2 \qquad (17)$$

بعد حذف المتحول y، فإننا نحصل على معادلة المسقط الشاقولي لناتج التقاطع، وهي:

$$x^2 + R_2^2 - z^2 - R^2 = 0 \qquad (18)$$

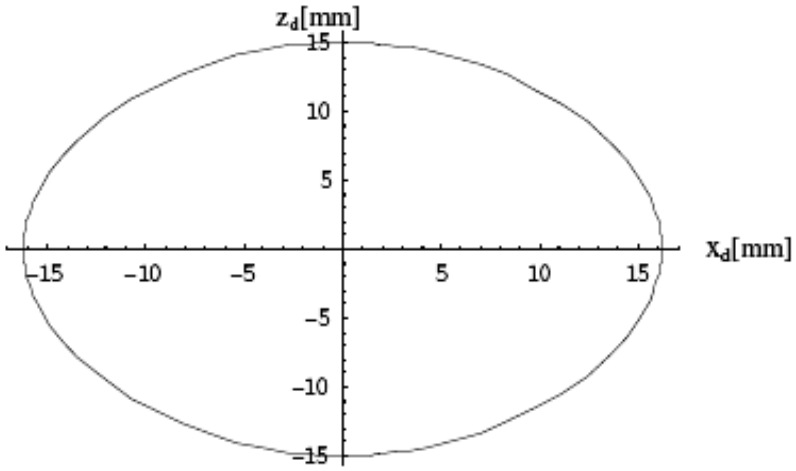
إن معادلة التحويل الخاصة بالمنحني γ_3 الخاص بالأسطوانة C يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (8) و (9) على المعادلة (18).

$$z_d^2 + R^2 - R^2 \cos^2 \frac{x_d}{R} - R_2^2 = 0 \qquad (19)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{aligned} z_{d1,2} &= \pm\sqrt{R_2^2 - R^2 \sin^2 \frac{x_d}{R}} \\ x_d &\in \{-R \arcsin R_2/R\,,\, R \arcsin R_2/R\} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (20)، فإننا نحصل على الشكل (9) الذي يمثل منحني التقاطع γ_3 الخاص بالأسطوانة C بعد النشر.



الشكل (9): منشور منحني التقاطع γ_3 الخاص بالأسطوانة C

أما معادلة المنحني γ_4 الخاص بالأسطوانة C_2 فإنه يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (21) و (22) التاليتين على المعادلة (18).

$$x_2 = x_{d2} \qquad (21)$$

$$z_2 = R_2 \cos\beta = R_2 \sin z_{d2}/R_2 \qquad (22)$$

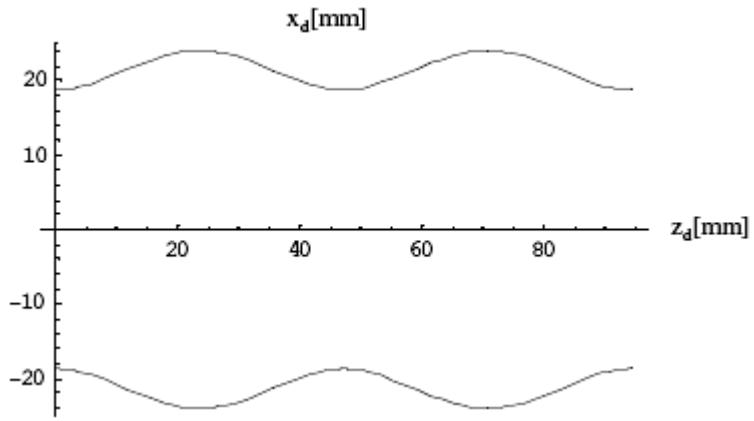
حيث أن x_{d2} و z_{d2} هما إحداثيا النقطة D بعد النشر. يتم تمثيل النقطة D عن طريق مسقطيها وعندئذ نحصل على العلاقة التالية:

$$x_{d2}^2 + R_2^2 - z^2 - R^2 = 0 \qquad (23)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{aligned} x_d &= \pm\sqrt{R^2 - R_2^2\cos^2\frac{x_d}{R_2}} \\ z_d &\in \{0, 2\pi R_2\} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (24)، فإننا نحصل على الشكل (10) الذي يمثل منحني التقاطع γ_4 الخاص بالأسطوانة C_2 بعد النشر.



الشكل (10): منشور منحني التقاطع γ_4 الخاص بالأسطوانة C_2

3.3 إيجاد منحني التقاطع γ_5 للأسطوانة C ومنحني التقاطع γ_6 للأسطوانة C_3

من الشكل (1) سندرس تقاطع الأسطوانة C (والتي قطرها D وجملة محاورها الرئيسية هي $Oxyz$) مع الأسطوانة C_3 (والتي قطرها D_3 وجملة محاورها الرئيسية هي $O_3x_3y_3z_3$)، مع الأخذ بعين الاعتبار الوضعية الخاصة ما بين x و x_3 وما بين y و y_3 وما بين z و z_3

إن معادلتي الأسطوانتين وفق جملة المحاور الرئيسية الخاصة بكل أسطوانة هما:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (25)$$

$$y^2 + z^2 = R_3^2 \qquad (26)$$

بعد حذف المتحول y، فإننا نحصل على معادلة المسقط الشاقولي لناتج التقاطع، وهي:

$$x^2 + R_3^2 - z^2 = R^2 \qquad (27)$$

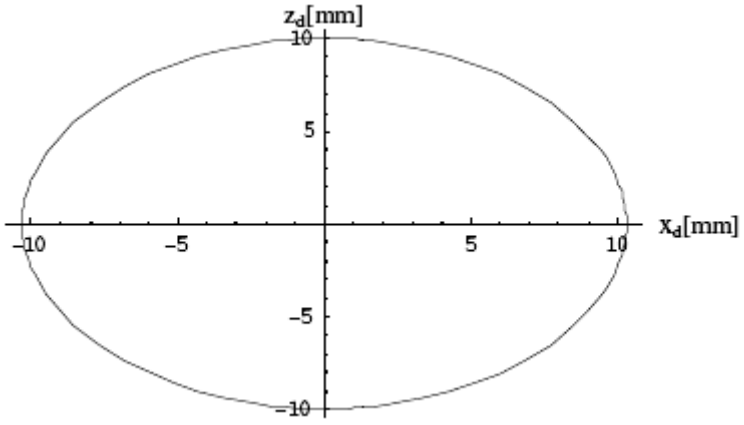
إن معادلة التحويل الخاصة بالمنحني γ_5 الخاص بالأسطوانة C يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (8) و (9) على المعادلة (27).

$$z_d^2 + R^2 - R^2 \cos^2 \frac{x_d}{R} - R_3^2 = 0 \qquad (28)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{aligned} z_{d1,2} &= \pm\sqrt{R_3^2 - R^2 \sin^2 \frac{x_d}{R}} \\ x_d &\in \{-R \arcsin R_3/R\,,\, R \arcsin R_3/R\} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (29)، فإننا نحصل على الشكل(11) الذي يمثل منحني التقاطع γ_5 الخاص بالأسطوانة C بعد النشر



الشكل (11): منشور منحني التقاطع γ_5 الخاص بالأسطوانة C

أما معادلة المنحني γ_6 الخاص بالأسطوانة C_3 فإنه يتم الحصول عليها بتطبيق التحويلين الواردين في المعادلتين (30) و (31) التاليتين على المعادلة (27).

$$x_3 = x_{d3} \qquad (30)$$

$$z_3 = R_3 \sin\lambda = R_3 \sin z_{d3}/R_3 \qquad (31)$$

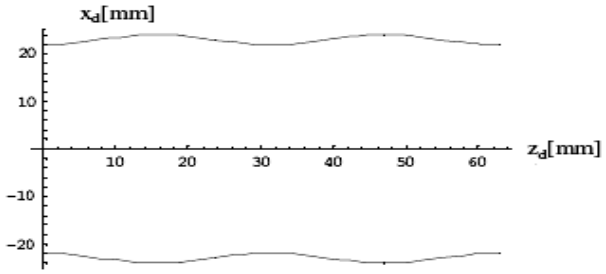
حيث أن x_{d3} و z_{d3} هما إحداثيا النقطة E بعد النشر. يتم تمثيل النقطة E عن طريق مسقطيها وعندئذ نحصل على العلاقة التالية:

$$x_{d3}^2 + R_3^2 - (R_3 \sin \frac{z_{d3}}{R_3})^2 - R^2 = 0 \qquad (32)$$

ويكون ناتج الحل هو:

$$\left.\begin{array}{l} x_{d3} \pm \sqrt{R^2 - (R_3 \cos\frac{z_{d3}}{R_3})^2} \\ z_{d3} \in \{0, 2\pi R_3\} \end{array}\right\} \qquad (33)$$

بالتمثيل البياني للمعادلة (33)، فإننا نحصل على الشكل (12) الذي يمثل منحني التقاطع γ_6 الخاص بالأسطوانة C_3 بعد النشر.



الشكل (12): منشور منحني التقاطع γ_6 الخاص بالأسطوانة C_3

4. الاستنتاجات والتوصيات

في هذا البحث تم استعراض حل مسألة تقاطع الأجسام الأسطوانية الدورانية لحالات تشمل تقاطع أسطوانتين متساويتي القطرين ومختلفتي القطرين، وتقاطع أسطوانتين محوراهما متعامدين أو غير متعامدين. كانت نتائج الدراسة متطابقة وفق الطريقة التحليلية والتخطيطية، إلا أن الطريقة التخطيطية المستندة إلى الهندسة الوصفية تحدد لنا شكل منحني التقاطع، وبالتالي يمكننا إسقاط هذا المنحني على مستويات الإسقاط المتعامدة، في حين أن الطريقة التحليلية تحدد لنا المعادلة الرياضية لمنحني التقاطع. إن منحني التقاطع الناتج هو عبارة عن قطع زائد مهما كانت وضعية الأسطوانتين المتقاطعتين، وهذا ما توصلنا إليه سواءً في الطريقة التحليلية أو في الطريقة التخطيطية.

في المشاريع الهندسية التي تستند إلى أعمال الأنابيب والخزانات الأسطوانية كمشاريع تمديد المياه ومشاريع أنابيب النفط والغاز وغيرها العديد من المشاريع الصناعية يكون حل مسألة تقاطع الأنابيب مع بعضها بعضاً وتقاطعها مع الخزانات الأسطوانية هو أمر في غاية الأهمية حيث لا يمكن تركه لخبرة العمال في المشروع حيث تحتمل الخطأ والصواب من خلال التجريب. لقد قمنا في هذا البحث بعملية نشر منحني التقاطع الفراغي والذي يقدم طريقة صحيحة ودقيقة وعملية لحل مسألة تقاطع

الأجسام الأسطوانية، وهو أمر لا غنى عنه في مثل هذه المشاريع، كحالة تقاطع الخزانات الأسطوانية الضخمة مع الأنابيب ذات الأقطار الكبيرة.

لقد وجدنا أنه في حالة تقاطع أسطوانتين غير متساويتي القطر، فإن منشور منحني التقاطع عند الأسطوانة ذات القطر الأكبر هو منحن مغلق ذو شكل بيضوي، في حين أنه في الأسطوانة ذات القطر الأصغر، يأخذ شكل خطين منحنيين.

تبين من خلال الدراسة أنه في حال كون محوري الأسطوانتين المتقاطعتين متعامدين، فإن منشور منحني التقاطع البيضوي عند الأسطوانة ذات القطر الأكبر يكون متناظراً، أما في حال عدم تعامدهما، فإن منشور هذا المنحني البيضوي يكون غير متناظر.

مستقبلاً سنقوم بإيجاد منحني التقاطع بين مخروطين أو مخروط واسطوانة .

المراجع

[1] R. Obradivic, "Determination of intersecting curve between two surfaces of revolution with parallel axes by using auxiliary planes and auxiliary spheres," *Facta Scientific Journal, Architecture and Civil Engineering*, vol. 2, no. 4, pp. 267–272, 2002.

[2] F. G. Higbee, *The Essentials of Descriptive Geometry*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2010, pp. 220–232.

[3] V. Postelnicu and S. Coatu, *Mica enciclopedie 3: Matematica* (translation from German). Bucharest, Romania: Technical Publishing House, 2018.

[4] N. N. Mihăileanu, *Complemente de geometrie sintetică*. Bucharest, Romania, 2020.

[5] W. M. Minifie, *A Text Book of Geometrical Drawing*. New York, NY, USA: D. Van Nostrand Publications, 1999, pp. 350–377.

[6] A. Tănăsescu, *Geometrie descriptivă, perspectivă* (English translation). Bucharest, Romania: Editura Didactică şi Pedagogică, 1999.

[7] F. G. Higbee, *The Essentials of Descriptive Geometry*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2008, pp. 220–232.

[8] D. A. Low, *Text-book on Practical Solid or Descriptive Geometry*. Oxford, U.K.: Longmans, Green, 2016, pp. 72–75.

[9] J. Moncea, *Surfaces Evolving (Desfasurar suprafetelor)*. Bucharest, Romania: Technical Publishing House, 2005.

[10] M. Manescu, *Descriptive Geometry: Applications (Geometrie descriptiva. Aplicatii)*. Bucharest, Romania: Didactic and Pedagogic Publishing House, 2008, ISBN: 973-30-5541-7.